Université Joseph Fourier
DEA Physique de la matière et du rayonnement

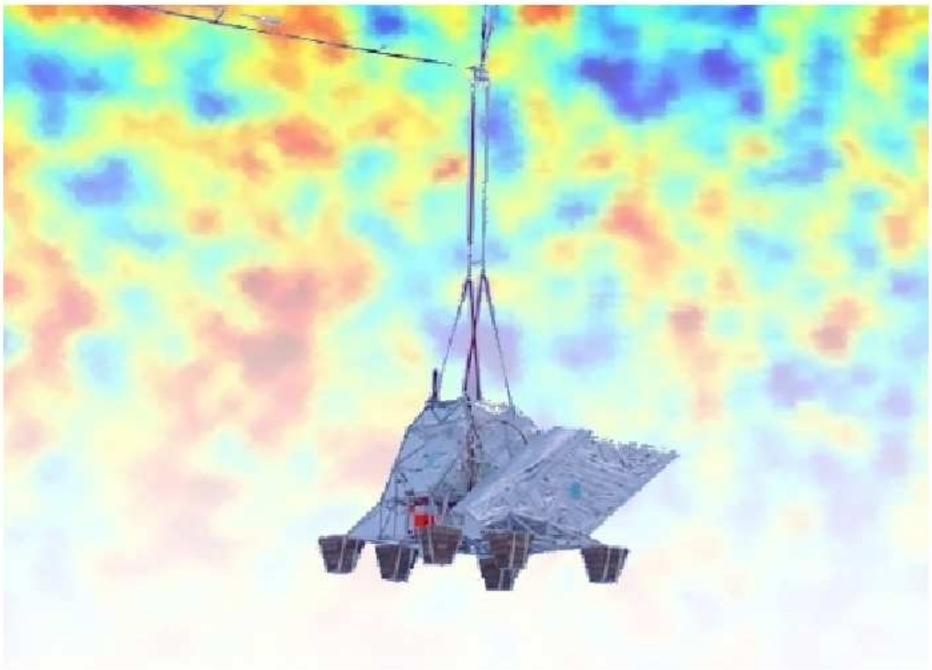
E.N.S.P.G
Matériaux Fonctionnels

Etude de la Polarisation du CMB

Détermination des fonctions de corrélation angulaire et application aux données de l'expérience ARCHEOPS

mars-juin 2003

Julien GRAIN



Responsable de stage : Juan Macías-Pérez

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie
53, Avenue des Martyrs
F-38026 Grenoble Cedex

Remerciements

Je remercie tout d'abord Juan Macías-Pérez, pour son soutien et pour avoir suivi mon travail avec intérêt durant toute la durée de ce stage.

Je remercie Daniel Santos pour avoir facilité mon intégration au sein de l'équipe ARCHEOPS.

Je tiens aussi à remercier le grand maître de la polarisation du CMB, Nicolas Ponthieu, qui m'a aidé à comprendre toute cette physique.

Je remercie également Matthieu Tristram pour ses "trucs-et-astuces" concernant la programmation sous IDL et François-Xavier Désert dont les interventions et conseils étaient toujours les bienvenus.

Finalement, je remercie toute l'équipe d'ARCHEOPS du LPSC pour m'avoir immédiatement intégré dans leur groupe et pour avoir rendu ce stage si enrichissant.

Un énorme merci à Julie pour tout et d'énormes félicitations à ma soeur et bon courage pour les neuf prochains mois.

Introduction

Le **fond diffus de rayonnement cosmologique** ou **CMB** n'était au départ qu'une conséquence théorique du Big Bang chaud mise en avant par Gamow [1] et Alpher & Herman [2]. Cependant Dicke *et al.* [3] reconnurent ce dernier dans la détection d'un bruit de fond inconnu à 3 K par Penzias & Wilson [4]. Ce ne sera qu'en 1992, que les anisotropies de ce rayonnement, de l'ordre de 10^{-5}, seront mises en valeur par le satellite COBE avec une résolution angulaire de 7°.

L'étude de ces anisotropies, de part leur dépendance envers les modèles, est un outil de choix pour contraindre les paramètres cosmologiques. De plus, ces anisotropies ne se limitent pas à la température, mais concernent aussi la polarisation. L'expérience ballon ARCHEOPS fait partie des expériences qui ont mesurés ces anisotropies en température. ARCHEOPS était aussi muni de six bolomètres polarisés, permettant une détection de la polarisation du rayonnement de la poussière galactique, principale émission d'avant-plan pour le détecteur haute fréquence HFI du future satellite PLANCK.

Dans ce rapport, nous nous pencherons particulièrement sur la théorie de la polarisation du CMB puis sur l'évaluation de la fonction de corrélation entre les anisotropies en température et celle en polarisation.

Table des matières

Chapitre 1

Cadre théorique : le modèle du “Big Bang” et le CMB

Le modèle standard de la cosmologie apparut au début du vingtième siècle (1924) quand les physiciens realisèrent que la relativité générale d'Einstein pouvait s'appliquer à l'Univers dans son ensemble. A partir d'un *a priori* théorique fort (le **principe cosmologique**) et des équations de la gravitation selon Einstein, il est possible d'établir la dynamique de l'Univers. Ce modèle, développé d'abord par le météorologue russe Friedmann [6, 7], prévoit une singularité à partir de laquelle l'Univers s'étend. Ce n'est que plus tard que Fred Hoyle baptisa cette singularité **Big Bang** et que le terme fut alors adopté.

Une des conséquences directes du modèle du Big Bang est que l'Univers possède une histoire et un âge actuellement estimé à 13.7 milliards d'années [16]. A l'âge de 372 000 ans [16], l'Univers passa par une étape importante : le découplage entre matière et rayonnement entraînant un rayonnement fossile, le **Fond Diffus Cosmologique** ou **CMB**. L'observation de ce fond diffus constitue à la fois une preuve marquante du modèle du Big Bang et un outil observationnel de premier choix pour contraindre les paramètres cosmologiques.

Dans ce chapitre, je présenterai en premier lieu le modèle de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker ainsi que le CMB. Ensuite, nous nous pencherons plus précisément sur la polarisation du CMB.

1.1 Le modèle standard cosmologique

1.1.1 Le modèle de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

En 1929, l'astronome Hubble [8] met en évidence une corrélation entre le décalage vers le rouge des galaxies (**redshift**) et leur distance par rapport à la Voie Lactée. Cette relation suggère que les galaxies s'éloignent les unes des autres avec une vitesse proportionnelle à leur distance.

Une telle observation ne peut s'expliquer que grâce à une expansion de l'Univers. Si on ajoute à ceci l'observation du CMB alors les modèles de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker basés sur la relativité générale s'imposent comme étant les plus adaptés pour décrire l'Univers.

La cosmologie actuelle est fondée sur le **principe cosmologique** qui postule :

1. qu'il existe un temps cosmique qui est identique pour tout observateur ;
2. et que l'Univers est homogène et isotrope à grande échelle.

Un tel principe permet d'obtenir la métrique de l'espace-temps. C'est la métrique de Robertson-Walker [9, 10], qui s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right)\right) \tag{1.1}$$

Dans cette équation, $a(t)$ représente le facteur d'échelle et k est une constante valant -1,0 ou 1 définissant la courbure de l'Univers. Il est important de noter que cette métrique est exprimée en coordonnées comobiles et c'est donc le facteur d'échelle qui va nous permettre de décrire l'évolution de l'Univers à grande échelle.

En utilisant cette métrique et les équations d'Einstein on peut alors trouver la dépendance du facteur d'échelle en fonction du temps. Autrement dit, on en déduit la dynamique de l'Univers à grande échelle.

Les équations de Friedmann [6, 7] s'écrivent ainsi :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.3}$$

où ρ et p représentent respectivement la densité d'energie et la pression totale d'un fluide idéal dans l'Univers.

Ce fluide idéal peut se décomposer suivant différentes composantes :

1. le rayonnement ;
2. la matière baryonique, dont une partie compose la matière noire ;
3. la matière non-baryonique, dont une partie compose la matière noire ;
4. la constante cosmologique Λ associée à l'énergie noire.

Dans ce modèle cosmologique, il suffit de connaître la densité de chaque composant de l'Univers pour pouvoir décrire l'évolution de celui-ci. Il existe alors toujours un temps, que l'on prendra égal à zéro, pour lequel le facteur d'échelle s'annule et les grandeurs physiques deviennent infinies : c'est la singularité primordiale.

1.1.2 Les paramètres cosmologiques

Nous venons de voir que l'évolution de l'Univers peut être décrite si il est possible d'estimer un certain nombre de paramètres. Grâce à des mesures des anisotropies du CMB comme WMAP [16] ou ARCHEOPS [12, 13], mais aussi des observations de chandelles standards avec HST [11] ou des observations des supernovæ comme SNAP [15], l'estimation de ces paramètres est possible. Un certains nombre de ces paramètres sont cités ci-dessous :

1. **La constante de Hubble** :

$$H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = 72 \pm 3 \pm 7 \mathrm{km.s^{-1}.Mpc^{-1}} \tag{1.4}$$

elle donne le taux d'expansion de l'univers et cette valeur provient des données WMAP [16] et HST [11] ;

2. **La densité critique** :

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{1.5}$$

c'est la densité d'énergie qui donne un Univers plat.

3. **La densité de chaque composant** :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \tag{1.6}$$

elle est toujours rapportée à la densité critique.

$$\Omega_{matière} = 0.25 \pm 0.01 \tag{1.7}$$

obtenue en combinant les données WMAP [16] et les données sur la forêt Lyman-α [20, 21] ;

$$\Omega_\Lambda = 0.73^{+0.09}_{-0.07} \tag{1.8}$$

obtenue en cumulant les données ARCHEOPS [13] aux données HST [11] et aux autres données sur le CMB, WMAP exclue.

4. **La densité totale** :

$$\Omega_{tot} = \sum_i \Omega_i = 1.02 \pm 0.02 \tag{1.9}$$

obtenue à partir des données de WMAP [16] combinées avec d'autres données astrophysiques. L'Univers serait donc plat.

Cependant, toutes ces estimations ne suffisent pas à lever certaines dégénérescences entre les modèles. Une étude approfondie de la polarisation va permettre de lever une partie de ces dégénérescences en mesurant avec précision ces paramètres.

1.1.3 Les anisotropies du CMB et le spectre de puissance

La présence d'un rayonnement fossile à $T_0 = 2.7K$ est une conséquence directe du modèle de Big Bang chaud présenté dans le chapitre précédent. Sa détection, par hasard, par Penzias et Wilson [4] fut donc un des succés les plus marquant de ce modèle. Dans ce chapitre, nous décrirons brièvement les processus physiques qui amènent à la formation du CMB ainsi qu'à ses anisotropies. Ensuite, la statistique des anisotropies du rayonnement fossile seront abordées.

Le découplage rayonnement-matière

L'observation d'un fond diffus fossile résulte d'un découplage entre la matière et les photons à environ 372 000 ans [16]. En effet, l'Univers avant cet âge est composé d'un plasma en interaction avec les photons : l'Univers est dans un régime de couplage fort entre les photons et la matière avec comme interaction principale la diffusion Thomson des photons sur les électrons. Puisqu'il y a un couplage fort, la distribution des photons est donnée par la solution de l'équation de Boltzmann pour l'interaction Thomson correspondant à l'équilibre thermodynamique. On obtient alors un spectre de corps noir.

Cependant, avec l'expansion de l'Univers, le plasma se refroidit. La réaction d'équilibre $p+e^- \rightleftharpoons \gamma + H$ est de plus en plus favorisée vers la droite. Autrement dit au fur et à mesure que l'Univers évolue, il y a de plus en plus d'atomes d'hydrogène issus de la combinaison entre électrons et protons. Lorsque 90% des électrons sont combinés, les photons ont une énergie moyenne de 0.3 eV, ce qui n'est pas suffisant pour ioniser les atomes d'hydrogène formés.

Lorsque la recombinaison est achevée, les photons acquierent un libre parcours moyen d'environ la taille de l'Univers. Ils passent alors dans un régime de libre diffusion, ils sont découplés de la matière. Ce découplage a lieu pour un redshift d'environ 1088 [16]. Le CMB que l'on observe correspond à ces photons qui viennent de se découpler, c'est à dire les photons qui ont subit la dernière diffusion Thomson. On parle donc de surface de dernière diffusion.

Les anisotropies primaires

Puisqu'il y a des perturbations de densité dans le plasma avant le découplage, des anisotropies vont apparaître. Or, ces anisotropies vont toucher les photons jusqu'à la surface de dernière diffusion où elles sont gelées par le découplage. On doit donc observer des anisotropies dans le CMB aujourd'hui qui sont relatives aux perturbations dans l'Univers avant le découplage.

Les perturbations, qu'elles soient scalaires, vectorielles où tensorielles, vont se répercuter sur la distribution de photons. En résolvant les équations d'Einstein pour les perturbations du fluide primordial, et l'équation de Boltzmann dans l'espace de Fourier, on dérive le spectre des anisotropies du CMB. Pour les perturbations plus grandes que l'horizon au moment du découplage, les photons ne subiront qu'un effet gravitationnel de décalage vers le rouge : c'est l'effet Sachs-Wolfe (figure 1.1). Pour les perturbations plus petites que l'horizon, s'ajoutent un terme relatif aux fluctuations de densité et un relatif à la vitesse du fluide primordial, donnant lieu à des ondes acoustiques dans la surface de dernière diffusion (figure 1.1). Ces ondes vont être amorties à cause de l'épaisseur de la surface de dernière diffusion et du fait que la recombinaison n'est pas instantanée (figure 1.1).

Les anisotropies secondaires

Lors de la propagation des photons CMB de la surface de dernière diffusion jusqu'à nous, différents phénomènes vont produire également des anisotropies.

La première anisotropie secondaire à étudier est le dipôle cosmologique. En effet, la Terre est animée d'un mouvement propre par rapport au CMB. Donc par simple effet Doppler, un dipôle de 3.3 mK apparaît lorsque l'on observe le CMB.

S'ajoutent à ce dipole des effets gravitationnels comme l'effet Sachs-Wolfe intégré ou les lentilles gravitationnelles, mais aussi des effets non gravitationnels comme la reionisation.

Les émissions d'avant-plan

Enfin, différentes émissons astrophysiques connues comme celle de la poussière galactique ou l'émission synchrotron vont contaminer les observations du CMB : on les appelle émissions d'avant-plan ou "foreground" [17].

L'étude statistique

De part leur caractère aléatoire, les perturbations primordiales n'influent que sur la distribution statistique des anisotropies. Ce sont donc les propriétés statistiques des anisotropies qui vont nous permettre de contraindre les paramètres cosmologiques.

La manière la plus simple d'étudier les propriétés statitistiques est de calculer la fonction de corrélation à deux points des anisotropies sur la surface de dernière diffusion. De part le principe cosmologique, cette fonction ne dépendra que de l'écart angulaire entre les deux points :

$$C(\vec{n}_1.\vec{n}_2) = \left\langle \frac{\Delta T}{T_0}(\vec{n}_1).\frac{\Delta T}{T_0}(\vec{n}_2) \right\rangle \tag{1.10}$$

La moyenne est prise sur différentes réalisations d'Univers avec les mêmes paramètres cosmologiques. On décompose les anisotropies suivant les harmoniques sphériques et on obtient alors, en supposant les a_{lm} gaussiens :

$$\begin{aligned} \tfrac{\Delta T}{T_0}(\theta,\phi) &= \sum_{\ell,m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \\ C(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2}) &= \tfrac{1}{4\pi}\sum_{\ell}(2\ell+1)C_\ell P_\ell(\cos(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2})) \\ C_\ell &= \langle a_{\ell m}.a^*_{\ell' m'}\rangle\, \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Il est impossible d'observer plusieurs réalisations de notre Univers. C'est pourquoi, en faisant l'hypothèse d'ergodicité, on remplace les moyennes d'ensemble par des moyennes sur différentes directions du ciel :

$$C_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \mid a_{\ell m} \mid^2 \tag{1.12}$$

C'est ce spectre de puissance angulaire C_ℓ (figure 1.1) qui va nous permettre de caractériser les paramètres cosmologiques. Cependant, n'ayant accés qu'à une seule réalisation de l'Univers, toute expérience CMB permettra de calculer un estimateur non biaisé du spectre dont la variance est appelée la **variance cosmique** et sera intrinsèque à toute mesure du CMB :

$$var(\hat{C}_\ell) = \frac{2}{2\ell+1}\, {C_\ell}^2 \tag{1.13}$$

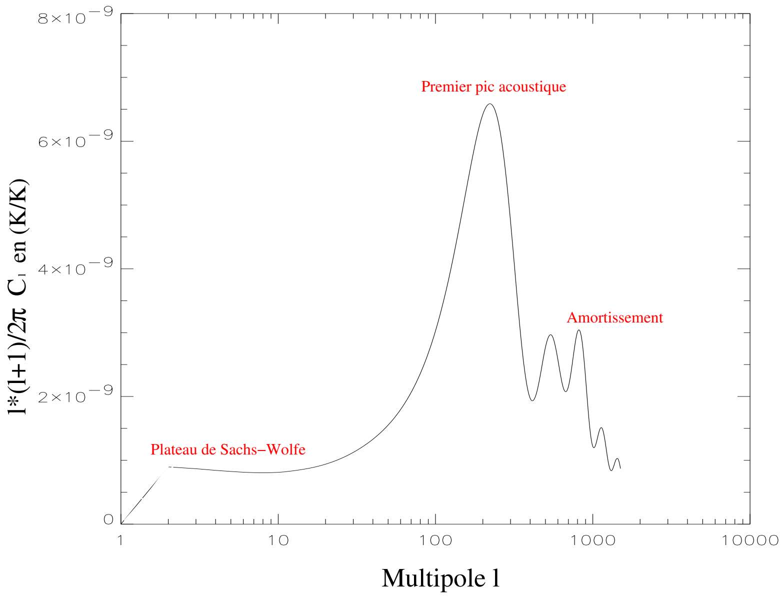


FIG. 1.1 – Spectre de puissance angulaire des anisotropie en température du CMB pour un modèle ΛCDM.

1.2 Le CMB et sa polarisation

Le CMB possède, en plus de celles en température, des anisotropies en polarisation. Ces anisotropies constituent une nouvelle source d'informations pour contraindre les paramètres cosmologiques. Dans ce chapitre, je rappelle quelques généralités, sur la polarisation. Puis, le processus de polarisation du CMB et le formalisme pour étudier ces nouvelles anisotropies sont abordés.

1.2.1 Généralités concernant la polarisation

Une onde électromagnétique possède dans le cas le plus général une polarisation elliptique ; c'est à dire que le champ électrique, par exemple, décrit une ellipse dans un plan d'onde en fonction du temps :

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_x\cos(\omega t) \\ E_y(t) &= E_y\cos(\omega t+\phi) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pour pouvoir décrire la polarisation d'une onde, il faut donc déterminer les paramètres de cette ellipse. Les paramètres de Stokes vont remplir cette fonction :

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2+E_y^2 \\ E_x^2-E_y^2 \\ 2E_xE_y cos(\phi) \\ 2E_xE_y sin(\phi) \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

où I représente l'intensité, Q et U permettent de définir sans équivoque l'orientation de l'ellipse et V nous donne l'ellipticité.

On définit ainsi le degré de polarisation par :

$$p = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I} \tag{1.16}$$

Pour l'étude du CMB, il est important de connaître l'algèbre des paramètres de Stokes : Q est invariant par réflexion suivant $\vec{e}_y$ alors que U change de signe et le doublet (Q,U) est un spinneur 2 [22] ; lors d'une rotation, dans le plan d'onde xOy, d'angle α de l'espace réel, il faut tourner (Q,U) d'un angle 2α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(2\alpha) & sin(2\alpha) \\ -sin(2\alpha) & cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

1.2.2 Description de la polarisation du CMB

Pour décrire la polarisation du CMB, il faut procéder en trois étapes :

1. déterminer les paramètres de Stokes aprés la dernière diffusion pour un photon ;
2. déterminer la polarisation pour le CMB ;
3. déterminer les sources possibles de création de CMB polarisé.

Polarisation due à la diffusion Thomson

Si le CMB est polarisée, c'est parce qu'il intéragit avec les électrons par un mécanisme de diffusion Thomson. La section efficace d'un tel mécanisme s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} \mid \vec{\epsilon}.\vec{\epsilon}' \mid^2 \tag{1.19}$$

où $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\epsilon}'$ sont les vecteurs polarisation entrant et sortant et σ_T la section efficace de Thomson.

Lors d'une interaction individuelle, un état de polarisation est favorisé par la diffusion Thomson. Pour la situation représentée par la figure 1.2, les paramètres de Stokes sont [22] :

$$\begin{aligned} I_{diff} &= \tfrac{3\sigma_T}{16\pi} I_{inc}(1+cos^2(\theta)) \\ Q_{diff} &= \tfrac{3\sigma_T}{16\pi} I_{inc} sin^2(\theta) \\ U_{diff} &= 0 \\ V_{diff} &= 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

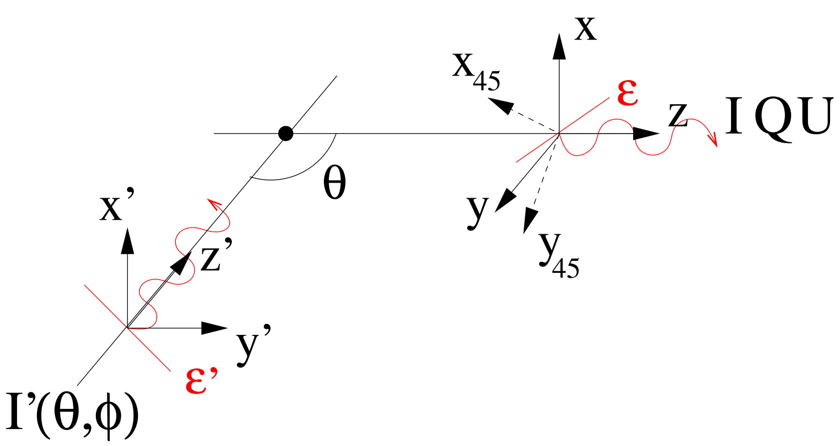


Fig. 1.2 – Diffusion Thomson d'un photon sur un électron. $\vec{\epsilon}$ et $\vec{\epsilon}'$ sont les vecteurs polarisation incident et diffusé et θ l'angle formé par les deux vecteurs de propagation z' et z.

Polarisation créée par un quadrupôle

Bien évidemment, lorsque l'on observe le CMB, on ne mesure pas la polarisation d'un seul photon mais celle d'un ensemble de photons. Des conditions supplémentaires concernant le fluide primordial doivent être ajoutées pour qu'une polarisation d'ensemble dans une direction donnée puisse être observée.

Prenons le cas d'un électron et de deux directions incidentes orthogonales pour les photons. Pour définir la polarisation, on choisit un repère de référence comme sur la figure 1.3. Compte tenu, du terme $| \vec{\epsilon}'\vec{\epsilon} |$, la diffusion Thomson des photons venant de la direction "haut-bas" ne laissera passer que la polarisation suivant $\vec{e_1}$. De même, seule la polarisation suivant $\vec{e_2}$ sera transmise pour les photons venant de la direction "gauche-droite".

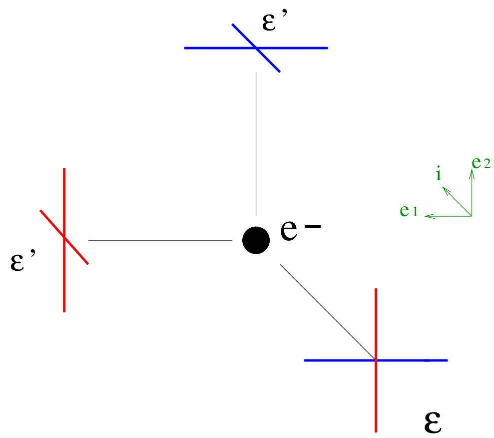


Fig. 1.3 – Diffusion Thomson par un électrons de photons provenant de deux directions orthogonales entre elles.

Considérons maintenant trois cas (figure 1.4) :

1. l'intensité incidente est isotrope (*i.e.* monopôle), alors la polarisation totale résultante est nulle ;
2. l'intensité initiale est un dipôle, alors la composante "Haut+bas" est totalement compensée par la composante "gauche+droite" et aucune polarisation d'ensemble n'est observée ;
3. l'intensité incidente est un quadrupôle, alors il n'y a plus de compensation et il en résulte une polarisation d'ensemble .

Ce qui vient d'être vu avec uniquement deux directions peut s'étendre à toutes les directions. Partons des équations 1.20 : sachant que dans le cas général, le plan d'observation fait un angle ϕ avec le plan

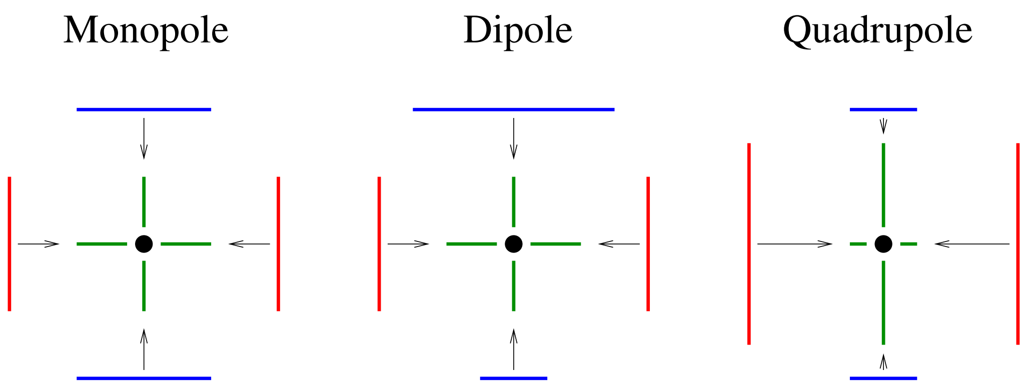


FIG. 1.4 – Polarisation résultante (vert) de la diffusion Thomson de photons provenant de deux directions orthogonales entre elles (rouge et bleu). *gauche :* l'intensité initiale est isotrope ; *centre :* l'intensité initiale est dipôlaire ; *droite :* l'intensité initiale est quadrupôlaire.

de la figure 1.2 (on utilisera alors les relations 1.18), et que l'intensité incidente parvient de toutes les directions possible, on obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{3\sigma_T}{16\pi}\int I_{inc}(\theta,\phi)(1+cos^2(\theta))d\Omega \\ Q & = & \frac{3\sigma_T}{16\pi}\int I_{inc}(\theta,\phi)sin^2(\theta)cos(2\phi)d\Omega \\ U & = & -\frac{3\sigma_T}{16\pi}\int I_{inc}(\theta,\phi)sin^2(\theta)sin(2\phi)d\Omega \end{array} \tag{1.21}$$

En décomposant l'intensité incidente suivant les harmoniques sphériques :

$$I'(\theta,\phi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{1.22}$$

il est possible de monter que seule la composante a_{22}, c'est à dire un quadrupôle, contribue à la polarisation [24].

Les perturbations primordiales et la polarisation engendrée

Pour que le CMB soit polarisé, il est nécessaire qu'il y ait des sources de quadrupôles. Les anisotropies en polarisation, comme celles en température, sont dues aux fluctuations primordiales, aussi bien scalaires (sur et sous-densité) que tensorielles (ondes gravitationnelles).

Considérons tout d'abord le cas des perturbations scalaires. Une telle perturbation possède une symétrie sphérique. Plus précisément, on peut toujours trouver un plan de symétrie pour notre système. La physique doit donc être identique lors d'une réflexion par rapport à ce plan. Mais, si cela ne pose pas de problème pour Q qui se comporte comme un scalaire vis à vis des réflexion, il n'en va pas de même pour U qui se comporte comme un pseudo-scalaire. Ceci entraîne que U'=-U=U. Donc U est nul.

La question importante est alors la suivante : est-ce qu'une telle perturbation génère un quadrupôle ? Pour y répondre, prenons la place d'un électrons du plasma à proximité d'une sur-densité (figure 1.5). Nous sommes donc attirés vers le centre de la sur-densité. Mais comme nous "descendons" le puits de potentiel gravitationnel, nous accélérons au cours de notre chute. Ainsi nous voyons les électrons plus proches du centre que nous s'éloigner, car ils vont plus vite. Mais ceux plus loins du centre que nous s'éloignent aussi, puisqu'ils vont moins vite que nous. De plus, compte tenu de la symétrie sphérique, toutes les trajectoires convergent. Donc deux électrons, un à notre "gauche" et l'autre à notre "droite", à la même distance que nous du centre se rapprochent de nous. Comme il y a un couplage fort entre le plasma et les photons, ces derniers suivent exactements les mouvements du plasma. Finalement, si nous retournons à la place de l'électrons, nous "voyons" les photons incidents comme un quadrupôle.

Pour conclure, une perturbation scalaire entraîne une polarisation qui est uniquement de type $\mathbf{Q_r}$. Et dans le cas précis d'une sur-densité elle sera radiale car Q_r sera positif.

Un autre type de perturbation trés intéressant est celui lié aux ondes gravitationnelles qui vont être produites lors de la phase inflationnaire de l'Univers. Lorsqu'une onde de ce type traverse une région de l'espace elle va le déformer suivant une direction x perpendiculaire à sa direction de propagation z

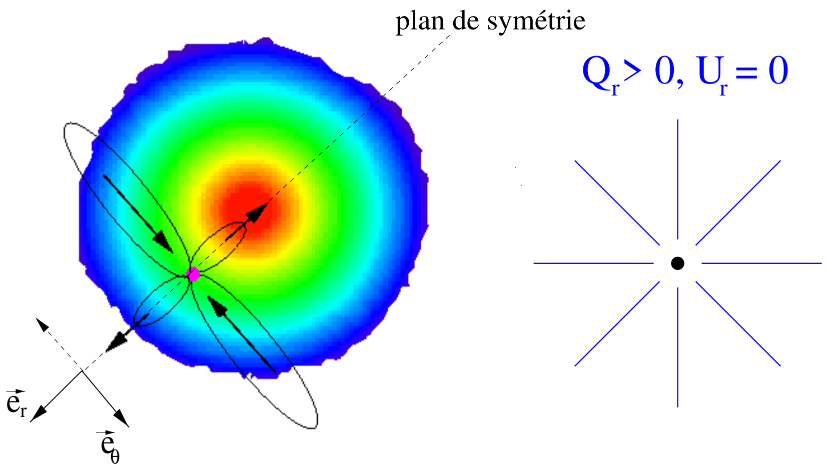


FIG. 1.5 – *Gauche :* un électron qui tombe dans une surdensité voit un mouvement du plasma quadrupôlaire ; *droite :* figure de polarisation engendrée par une sur-densité.

puis suivant une direction y perpendiculaire à la fois à x et à z. Notre système physique n'est alors plus invariant par parité et **la polarisation engendrée par le passage de l'onde gravitationnelle sera à la fois $\mathbf{Q_r}$ et $\mathbf{U_r}$** (figure 1.6).

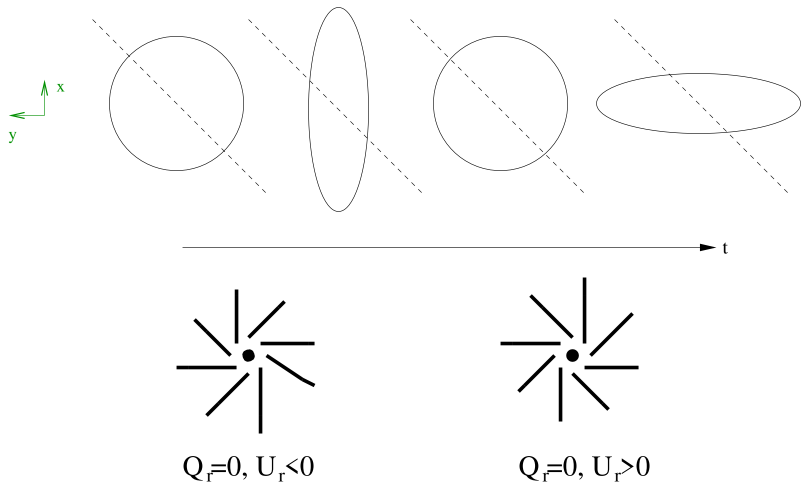


FIG. 1.6 – *Haut :* déformation d'un cercle de particules test lors du passage d'une onde gravitationnelle, le système physique n'est pas invariant par parité ; *bas :* figure du mode U de la polarisation engendrée par le passage de l'onde.

1.2.3 Les corrélations en polarisation et les champs E et B

Comme pour la température, c'est par une étude statistique des anisotropies du CMB que l'on tire des informations physiques. Ceci vient tout d'abord de la nature stochastique des anisotropies mais aussi du fait que l'on cherche à avoir des informations sur l'Univers dans son ensemble.

Les corrélations en polarisation

Comme la polarisation du CMB provient des fluctuations de densité, on doit alors s'attendre à observer non seulement des anisotropies en polarisation mais aussi des corrélations entre ces anisotropies. Mais comment traite-t-on ces nouvelles corrélations ? La première idée est la suivante : on procède comme pour la température sauf qu'il ya trois paramètres qui sont les trois premiers paramètres de Stokes

($V = 0$ pour le CMB). Il est évident que l'intensité dans les paramètres de Stokes est équivalente à la température : puisque le CMB a un spectre de corps noir, $I \propto T^4$ donc $\frac{\Delta I}{I} \propto 4\frac{\Delta T}{T}$. On aura donc *a priori* six coefficients de corrélation à deux points (C^{II}, C^{QQ}, C^{UU}, C^{IQ}, C^{IU} et C^{QU}) qui nous permettront de décrire entièrement le CMB (c'est à dire polarisation et température).

Mais il ne faut pas oublier que le doublet (Q, U) est un spinneur 2 et qu'il dépend donc du référentiel choisi. Autrement dit, lorsque l'on calculera des corrélations à deux points avec de la polarisation, il sera nécessaire de s'assurer que le référentiel est le même dans les deux points. Imaginons un observateur idéal qui ne mesure que du CMB et couvre tout le ciel (cet observateur est au centre d'une sphére). Lorsqu'il "mesurera" la polarisation dans une direction donnée, il le fera dans le repère naturel lié aux coordonnées sphériques (figure 1.7) : Q et U se mesurent dans le plan tangent à la sphère avec comme vecteur de base le vecteur polaire $\vec{e_\theta}$ et le vecteur azimuthale $\vec{e_\phi}$. Donc à chaque direction d'observation, la polarisation est mesurée dans un repère propre à cette direction. Si notre observateur est un peu naïf et calcule brutalement la corrélation à deux points, il obtiendra un résultat totalement absurde puisque les paramètres Q et U du deuxième point seront mesurés dans un repère différent de celui du premier point. Pour calculer des corrélations qui ont un sens, il faut pour chaque paire de points de la sphére définir un référentiel commun. Pour cela, on tourne nos deux référentiels propres à chaque points de manière à aligner le vecteur polaire sur le méridien qui joint les deux points. On applique alors les relations 1.18 pour obtenir les nouveaux paramètres de Stokes. Comme on applique cette opération sur les deux points, les nouveaux paramètres de Stokes sont "mesurés" dans le même référentiel. Ainsi le calcul de la moyenne ergodique donnant les coefficients de corrélations se fait avec des quantités indépendantes du système de coordonnées.

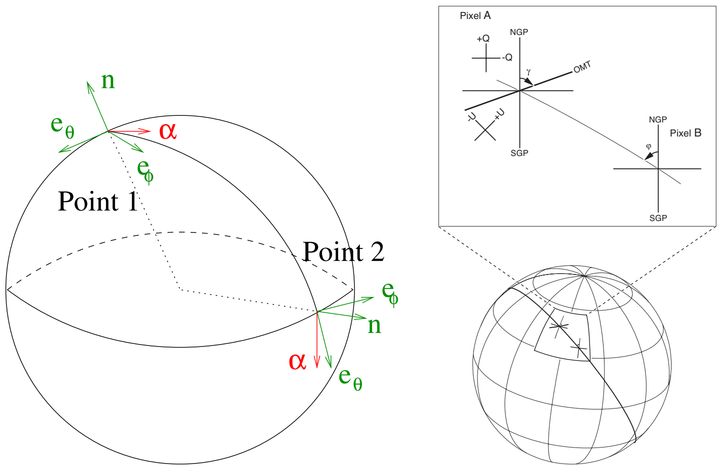


FIG. 1.7 – *Gauche :* géométrie des paramètres de Stokes, il faut tourner le repère de mesure en vert pour l'aligner sur le vecteur α (en rouge) tangent à le géodésique reliant les deux points. *Droite :* zoom de la géométrie des paramètres de Stokes (figure prise dans *Kogut et al.* [18]).

Ils nous est maintenant possible de calculer les six corrélations. Cependant, par de simple considérations de symétrie et avec cette méthode de calcul, les corrélations TU et QU vont être nulles. En supposant que les anisotropies sont gaussiennes, il est alors possible de montrer que pour une couverture totale du ciel et en se plaçant systématiquement dans le repère tangentiel au grand cercle joignant les deux pixels, que les corrélation C^{IU} et C^{QU} sont nulles [26].

Ce résultat s'applique au CMB où l'hypothèse de gaussianité est vérifiée. Il ne faut cependant pas l'appliquer à d'autres type d'émission (comme ceele de la poussière galactique par exemple) où il y a de fortes non-gaussianités.

Les champs E et B

Comme il l'a été présenté précédemment, pour faire une étude statistique de la polarisation du CMB via les paramètres de Stokes, il est nécessaire d'effectuer deux rotations, qui sont aussi à déterminer, à chaque paire de points. Ceci est inhérent au caractère spinnoriel du doublet (Q, U). Si maintenant, on cherche à connaître les corrélations non plus dans l'espace direct mais dans l'espace des harmoniques sphériques, le calcul devient trés compliqué. C'est pourquoi Zaldarriaga et Seljak [25, 26] ont proposé un formalisme qui permet d'exprimer la polarisation avec un champ scalaire et un autre pseudo-scalaire.

Comme (Q, U) est un spinneur 2, ces grandeurs vont se décomposer naturellement sur la base des harmoniques sphériques spinnées de spin 2 :

$$(Q \pm iU)(\vec{n}) = \sum_{\ell,m} a_{\pm 2,\ell m} \ {}_{\pm 2}Y_{\ell m}(\vec{n}) \tag{1.23}$$

En introduisant les combinaisons linéaires suivantes [26] :

$$\begin{aligned} a_{E,\ell m} &= -\tfrac{a_{2,\ell m} + a_{-2,\ell m}}{2} \\ a_{B,\ell m} &= i\tfrac{a_{2,\ell m} - a_{-2,\ell m}}{2} \end{aligned} \tag{1.24}$$

il est possible de construire deux champs, un scalaire (E) et l'autre pseudo-scalaire (B) [26] :

$$\begin{aligned} E(\vec{n}) &= \sum_{\ell,m} a_{E,\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \\ B(\vec{n}) &= \sum_{\ell,m} a_{B,\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Il y a autant d'informations contenues dans les champs E et B que dans Q et U mais les champs E et B sont plus faciles d'utilisation car ils ne dépendent pas du repère choisi. Par contre, ils ne sont pas directement mesurés ; c'est toujours Q et U que l'on mesure.

Il est aussi possible de construire E et B directement dans l'espace réel [27]. En effet les champs E et B en un point donné seront une combinaison linéaire des champs Q et U au voisinage de ce point : le lien dans l'espace réel n'est pas local. En appliquant alors les régles de symétrie que doivent satisfaire tous ces champs, on montre que E n'est relié qu'au mode Q et B qu'au mode U dans le repère radial de la figure 1.5 :

$$\begin{aligned} E(\vec{n}) &= \int w(\vec{n} - \vec{n'}) Q_r(\vec{n'}) d\vec{n'} \\ B(\vec{n}) &= \int w(\vec{n} - \vec{n'}) U_r(\vec{n'}) d\vec{n'} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Pour retrouver la définition obtenue dans l'espace des harmoniques sphériques, on choisit $w(\theta) = \frac{1}{\pi\theta^2}$ avec $w(0) = 0$ [27].

Zaldarriaga [26] montre alors comment relier les corrélations entre les paramètres de Stokes dans l'espace réel et les corrélations des champs T, E et B dans l'espace des harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} \langle T(\vec{n}_1) T(\vec{n}_2) \rangle &= \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell^{TT} P_\ell(\cos\theta) \\ \langle Q_r(\vec{n}_1) Q_r(\vec{n}_2) \rangle &= \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[C_\ell^{EE} F_{1,\ell,2}(\cos\theta) - C_\ell^{BB} F_{2,\ell,2}(\cos\theta) \right] \\ \langle U_r(\vec{n}_1) U_r(\vec{n}_2) \rangle &= \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[C_\ell^{BB} F_{1,\ell,2}(\cos\theta) - C_\ell^{EE} F_{2,\ell,2}(\cos\theta) \right] \\ \langle T(\vec{n}_1) Q_r(\vec{n}_2) \rangle &= -\sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell^{TE} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} P_\ell^2(\cos\theta) \end{aligned} \tag{1.27}$$

où les fonction F (annexe A.1) ne dépendent que des multipôle ℓ et m et des polynôme de Legendre P_ℓ^m. Ces résultats sont valables dans le repère tangent à la géodésique reliant les deux pixels.

1.2.4 Les propriétés des champs E et B

Le formalisme de Zaldarriaga nous permettant de traiter les anisotropies en polarisation d'une manière identique à celles en température, il reste cependant à faire le lien entre un type de perturbations et un type de champ de polarisation E ou B et en déduire les nouvelles contraintes que l'on peut apporter sur l'évolution de l'Univers.

Figure de polarisation

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent différents types de perturbations génèrent différentes figures de polarisation :

1. une perturbation scalaire ne produit que de la polarisation Q_r, donc on n'observera que du mode E ;
2. une perturbation tensorielle produit aussi bien du mode Q_r, que du U_r, on observera donc à la fois du mode E et du mode B.

La figure 1.8 montre l'allure des figures de polarisation en fonction du mode observé.

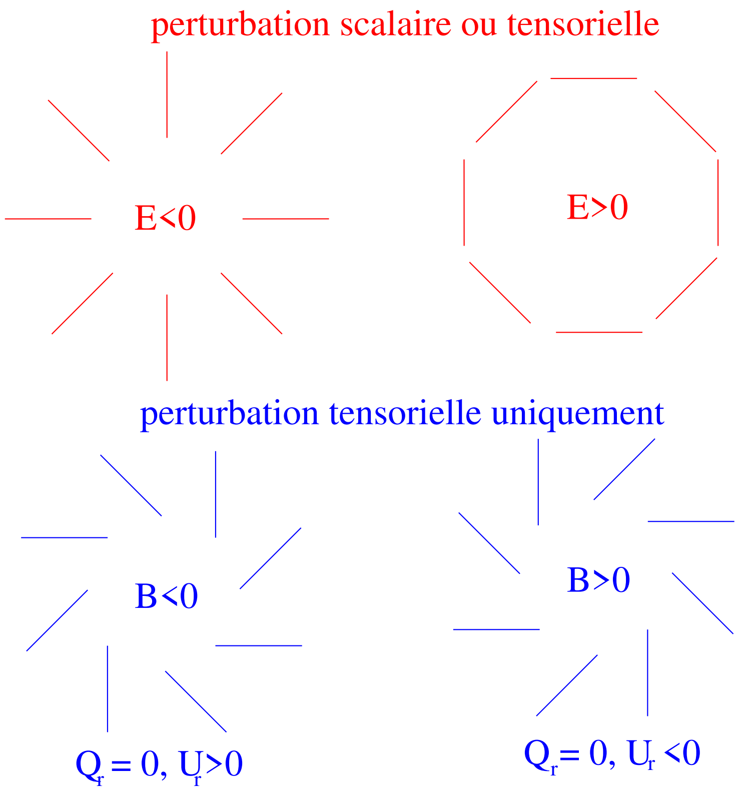


FIG. 1.8 – Figure de polarisation pour les champs E et B. *Haut :* polarisation E due aux perturbations scalaires et tensorielles. *Bas :* polarisation B due uniquement aux perturbations tensorielles.

Les contraintes sur la physique grâce aux modes E et B

Ces nouveaux champs de polarisation nous permettent d'apporter des contraintes sur la dynamique de l'Univers et offrent une autre source d'informations sur l'histoire de notre Univers. Considérons deux exemples :

1. les ondes gravitationnelles primordiales ;
2. la reionisation.

En quoi la polarisation peut elle nous renseigner sur les ondes gravitationnelles primordiales ? L'inflation prévoit un spectre invariant d'échelle de perturbations tensorielles. C'est à dire des ondes gravitationnelles produites durant les premiers instants de l'Univers (10^{-30}s après le Big Bang). Comme nous l'avons vu précédemment, la présence de mode B dans la polarisation du CMB est la signature de la présence d'ondes gravitationnelles. La figure 1.9 montre l'allure du spectre de puissance du mode B.

La reionisation peut être aussi contrainte par la polarisation du CMB. A un redshift d'environ 6 ou 7 d'après la théorie, les premières étoiles ont commencé à se former. Ceci entraîna alors une reionisation globale de l'Univers. Si il y a eu reionisation, les photons du CMB ont interagi de nouveau avec des électrons, modifiant ainsi les spectres de puissance angulaire. On peut décrire de différentes manières cette reionisation :

1. soit on définit le redshift de reionisation et le taux de reionisation ;
2. soit on définit une profondeur optique τ, relative à l'absorption des photons CMB.

Par exemple, un pic dont l'amplitude augmentera avec la profondeur optique va apparaître à trés bas l dans le spectre de corrélation entre la température et le mode E (figure 1.9).

En utilisant la corrélation entre température T et le mode E (figure 1.10), le satellite WMAP a pu mettre une contrainte sur la profondeur optique de reionisation $\tau = 0.17 \pm 0.03$ [18]. Ceci correspond à un redshift de reionisation, et donc de première formation des étoiles, de 17, ce qui est assez surprenant vis à vis des prédiction précédentes. Il est donc trés important de vérifier un tel résultat, en particulier de vérifier la possible contamination par les émissions d'avant-plan.

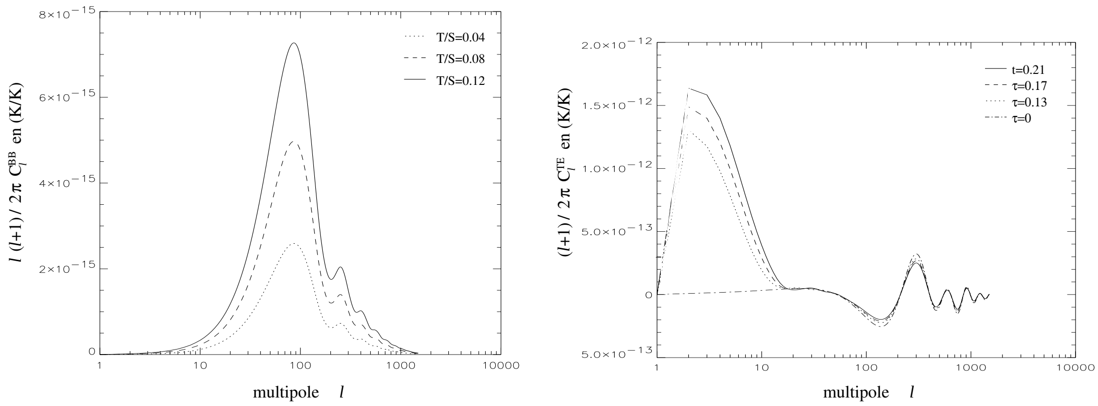


FIG. 1.9 – *Gauche :* spectre de puissance angulaire du mode B pour différente valeur du rapport T/S du quadrupôle tensoriel sur le quadrupôle scalaire. *Droite :* spectre de la cross-corrélation entre la température et le mode E en fonction de la profondeur optique engendrée par la reionisation. On peut voir clairement un pic du à cette reionisation apparaître ; l'amplitude de ce pic augmentant avec la profondeur optique.

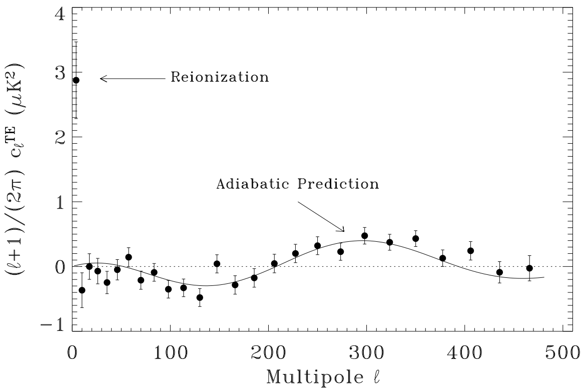


FIG. 1.10 – Cross-correlation C_ℓ^{TE}obtenue aprés une année de mesure par le satellite WMAP. L'excés de puissance à trés bas l serait du à la reionisation (figure prise de *Kogut et al.* [18]).

Chapitre 2

La cross-corrélation IQ obtenue avec l'expérience ARCHEOPS

La mesure des anisotropies en polarisation du CMB constitue actuellement une grande source d'informations sur la physique de l'Univers primordial. L'étude des fonctions de corrélation des paramètres de Stokes permettra de lever de nombreuses dégénérescences entre les différents jeux de paramètres cosmologiques et de contraindre les différents modèles cosmologiques de type inflationnaire.

La mesure de la polarisation du CMB est cependant difficile puisque le signal polarisé est de 1 à 3 ordres de grandeur inférieur au signal en température. Il est donc nécessaire, pour la mesure de la polarisation par des satellites comme WMAP ou PLANCK, de bien connaître les émissions d'avant-plan. En particulier l'émission de la poussière galactique est supposée polarisée de manière significative. Cette supposition a été confirmée récemment par les résultats de l'expérience ballon ARCHEOPS fournissant ainsi la première mesure de la polarisation de la poussière galactique, une étude plus approfondie des corrélations induites par cet avant-plan pouvant alors être menée.

Dans cette deuxième partie, l'expérience ARCHEOPS et les résultats qu'elle a fourni concernant la poussière galactique seront abordés. Ensuite, nous nous proposons de présenter le travail que nous avons effectué sur l'estimation des fonctions de corrélation, à savoir l'étude précise de l'estimateur applicable aux données d'ARCHEOPS. Finalement, je présenterai les résultats obtenus pour les corrélations de l'émission de la poussière galactique en utilisant les données d'ARCHEOPS.

2.1 L'expérience ARCHEOPS et la mesure de la poussière galactique

2.1.1 Présentation de l'expérience ballon ARCHEOPS

ARCHEOPS est une expérience ballon utilisant la technologie développée pour l'instrument haute-fréquence (HFI) du satellite Planck. L'objectif de cette expérience était de mesurer les anisotropies du CMB avec une précision de quelques μK et avec une résolution angulaire de 10 minutes d'arc. Un vol de 12 heures, couvrant ainsi environ 30% du ciel, permettait alors de contraindre le spectre C_ℓ dans la zone $15 < \ell < 400$.

La détection des photons du CMB est assurée par une série de bolomètres répartis suivant quatre canaux de fréquence :

1. huit bolomètres à 143 GHz ;
2. huit autres à 217 GHz ;
3. six bolomètres à 353 GHz ;
4. et enfin deux derniers à 545 GHz.

Ces bolomètres sont placés au foyer d'un telescope grégorien hors axe, constitué d'un miroir primaire parabolique de 177 cm selon sa plus grande dimension et d'un miroir secondaire elliptique de 84 cm. Comme le montre la figure 2.1, une telle répartition permettait à ARCHEOPS d'évaluer les différents contaminants. De plus les six bolomètres à 353 GHz étaient polarisés et montés par paire dans un même cornet, ce qui permet en plus une mesure en polarisation, en particulier de la poussière galactique. Les bolomètres mesurent l'échauffement du au passage des photons. Un cryostat à dilution ^{3}He/^{4}He a assuré le refroidissement des bolomètres d'ARCHEOPS à 100 mK avec des fluctuations de l'ordre de 100 μK.

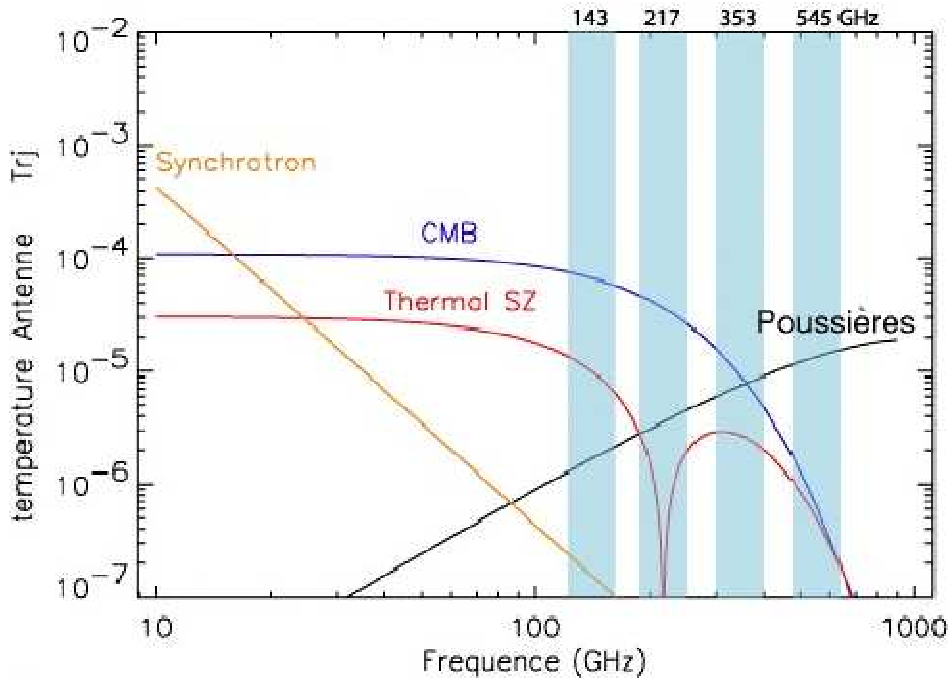


FIG. 2.1 –

ARCHEOPS a effectué trois vols :

1. un vol technique de 18 heures entre Trapani (Sicile) et l'Espagne le 17 juillet 1999 ;
2. un vol Arctique qui a permis entre autre d'étalonner l'instrument à Kiruna le 29 janvier 2001 ;
3. enfin un dernier vol scientifique au départ de Kiruna le 7 février 2002.

Des vols Arctiques s'imposaient, puisqu'une telle mesure ne peut se faire que la nuit et sans Lune. Une nuit longue était nécessaire pour recueillir le plus de données possible.

Dans la suite de ce rapport, tous les outils présentés et les applications faites utiliseront les données prises durant le dernier vol des six bolomètres polarisés.

2.1.2 La poussière galactique

La poussière galactique est constituée de petits grains de matière présents dans le milieu inter-stellaire (ISM). Son émission est bien modélisée par un corps noir à 17.5K avec une loi d'émissivité en ν^2 [30].

Les observations de l'absorption du rayonnement des étoiles par cette poussière ont montré qu'elle engendrait de la polarisation. En effet, les grains de poussière galactique ne sont pas sphériques mais oblates [31] et absorbent préférentiellement le rayonnement optique selon leur grand axe. Avec une émission de corps noir à 17.5K, la poussière galactique émet principalement des ondes submillimétriques polarisées selon le grand axe des grains. **Ainsi la direction de polarisation de l'émission thermique infrarouge est orthogonale à celle de la polarisation observée dans l'optique.** Cependant, le niveau de polarisation n'est important que si les grains sont alignés. Une corrélation évidente est d'ailleurs observée entre le champ magnétique galactique et l'émission polarisée de la poussière suggérant un alignement des grains par ce champ [14, 24].

Prunet *et al.* [33] ont montré que la poussière émet avec une même amplitude aussi bien du mode E que du mode B. En étudiant différentes direction du champ magnétique, ils ont montré que le spectre variait en $\ell^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1.4$, avec une amplitude de l'ordre du millième de $(\mu K)^2$. De plus, à la différence du CMB, les corrélations entre E et B et entre T et B, autrement dit celles entre I et U et Q et U, ne seront pas forcément nulles.

Rayonnant dans le domaine millimétrique, la poussière galactique est la principale émission d'avant-plan pour les mesures à haute fréquence du CMB. L'intensité de l'émission de la poussière galactique à des fréquences millimétriques peut être extrapolée à partir des mesure de IRAS et COBE-DIRBE. Cependant, la polarisation d'une telle émission est inconnue pour des échelles plus grandes que 10 minutes d'arc, qui sont précisément les échelles intéressantes pour le CMB.

2.1.3 Mesure de polarisation par ARCHEOPS

Comme on peut le voir sur la figure 2.1, les six bolomètres à 353 GHz sont sensibles à l'émission de la poussière galactique. Il a donc été possible à partir des données d'ARCHEOPS sur ce canal de mesurer la polarisation du rayonnement de la poussière.

Chaque paire de bolomètres polarisés est montée de manière à ce qu'une onde electromagnétique soit divisée en deux modes orthogonaux polarisés linéairement. L'un de ces modes est transmis au premier bolomètres de la paire alors que l'autre est transmis au second. Ainsi la somme des deux signaux donne l'intensité alors que la différence le paramètre Q dans la base propre de la paire. Les trois paires sont orientées à $60°$ l'une de l'autre.

Cartographie en polarisation [14, 24]

La première étape pour étudier la polarisation de l'émission de la poussière galactique est l'obtention de cartes en intensité, en Q et en U à partir des données ARCHEOPS qui sont ordonnées en temps.

Pour une direction donnée, on choisit la base naturelle $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$ comme référence pour mesurer (I, Q, U). Si ψ est l'angle formé par le champ electrique incident $\vec{E}$ et $\vec{e_\theta}$ et α celui entre le polariseur et $\vec{e_\theta}$ alors la mesure est la suivante :

$$m(\alpha) \propto (I + \cos(2\alpha)Q + \sin(2\alpha)U + n) \tag{2.1}$$

où n est le bruit. Pour construire une carte de N_{pix} pixels, l'ensemble des données doivent être prises en compte et alors on obtient :

$$M = AS + N \tag{2.2}$$

où M est un vecteur $N_t \times N_{bol}$ de données ordonnées en temps (N_t étant le nombre de données), S un vecteur $3 \times N_{pix}$ de paramètres de Stokes de la carte, A la matrice de pointage et N la matrice de covariance du bruit. On cherche alors à estimer S. En minimisant le χ^2 on trouve l'estimation de S suivante :

$$S = (A^t N^{-1} A)^{-1} A^t N^{-1} M \tag{2.3}$$

où $A^t N^{-1} A$ donne la matrice de covariance des paramètres de Stokes. Mais une telle solution suppose qu'il est possible d'inverser de grandes matrices. En supposant que le bruit est décorrélé d'une mesure à l'autre, donc d'un pixel à l'autre, alors N est diagonale et chaque pixel peut etre considéré de manière individuel et ainsi il n'y a plus qu'à inverser des matrices 3×3. On calcule d'abord $A^t N^{-1} A$ puis le vecteur $A^t N^{-1} M$.

Les cartes obtenues

Les premières cartes obtenues ont été faites dans le but de détecter la polarisation de la poussière galactique [14]. Un tel travail a permis de prouver que l'emission diffuse du plan galactique était polarisée de manière significative et que les résultats expérimentaux étaient cohérents avec les modèles.

Cependant, pour pouvoir déterminer la fonction de corrélation de la poussière galactique afin d'estimer sa contribution à une expérience CMB, il est nécessaire d'obtenir des cartes de plus grandes précision et de se concentrer sur les hautes latitudes. C'est pourquoi, un nouveau traitement des données a été utilisé avant de créer de nouvelles cartes avec la méthode exposé précédemment. Ce traitement se décompose en deux étapes :

1. un destriage qui permet d'éliminer les basses fréquences dans la TOI (données ordonnées en temps) ;
2. un traitement en ondelettes qui permet d'éliminer le bruit haute fréquence dans la TOI.

Il est alors possible d'obtenir des cartes utilisables[1] (figure 2.2) pour l'estimation de la fonction de corrélation.

[1] Le nombre de pixel est aussi inférieur à celui des cartes précédentes afin de minimiser le temps de calcul des fonctions de corrélations

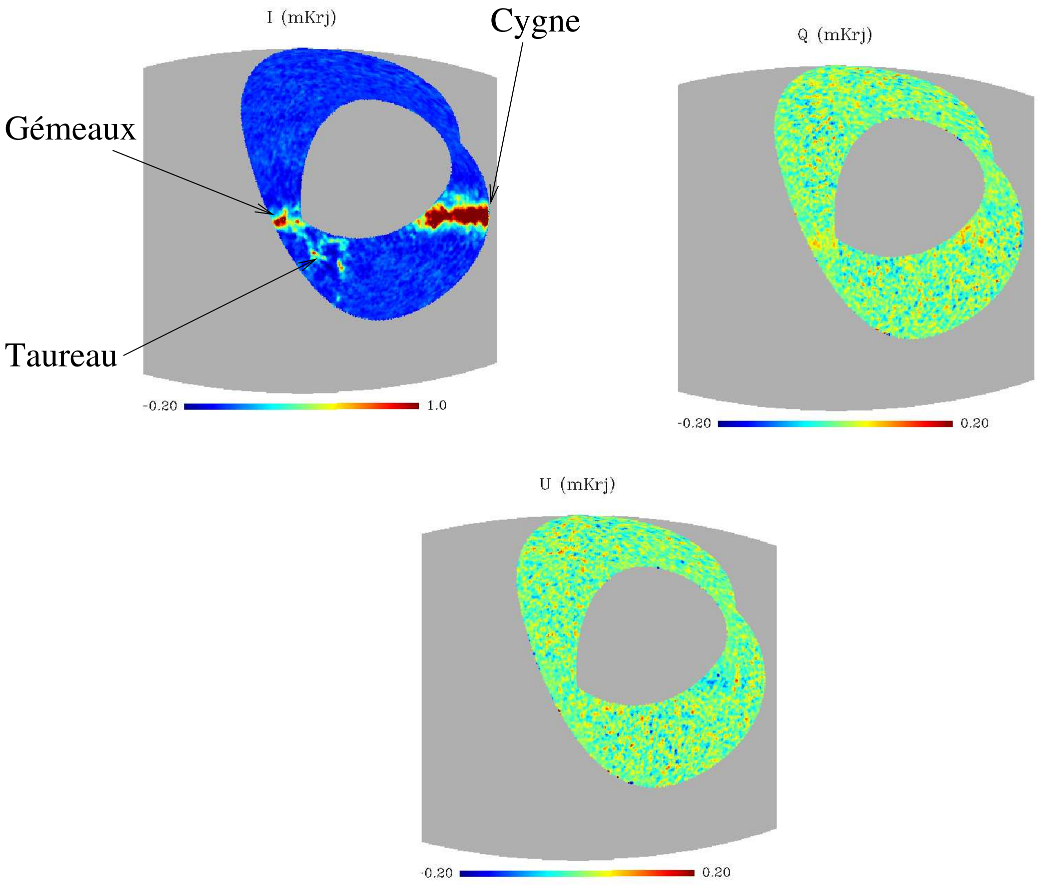


FIG. 2.2 – Cartes en intensité I (haut gauche), en mode Q (haut droit) et en mode U (bas) à 353 GHz en mK_{RJ} et lissées à 1 degrés; les données ARCHEOPS ont subit un destriage éliminant les basses fréquences et un traitement en ondelette pour enlever le bruit haute fréquence.

Deux zones apparaissent clairement polarisées : la zone du Cygne et celle du Taureau et des Gémeaux. Ces nuages polarisés avait déjà pu être détectés à partir des cartes établies précédemment par la collaboration ARCHEOPS [14] : les cartes obtenues pour l'estimation des fonctions de corrélation sont donc en trés bon accord avec celles obtenues précédemment.

2.2 Le calcul des fonctions de corrélation

On cherche maintenant à estimer la fonction de corrélation de la poussière galactique à partir de cartes des paramètres de Stokes. La technique utilisée jusqu'à présent consiste à calculer directement le spectre de puissance angulaire. Cependant calculer tout d'abord la fonction de corrélation dans l'espace réel a des avantages pour les expériences n'ayant pas une couverture totale du ciel, car ce calcul n'est pas biaisé.

Dans ce chapitre, la technique de calcul de la fonction de corrélation sera présentée. Puis les propriétes de notre estimateur seront abordées avec des résultas de simulations à l'appui.

2.2.1 La technique de calcul de la fonction de corrélation

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.3, pour faire une étude en polarisation il est nécessaire de calculer quatre corrélations à deux points pour le CMB. Comme nous nous intéressons ici à un avant-plan, il faudra aussi calculer les deux corrélations IU et QU qui ne seront pas forcément nulles dans ce cas. De plus, il est indispensable de prendre soin de se placer dans le bon référentiel.

L'estimateur de la fonction de corrélation est le suivant :

$$\hat{C}_{XY}(\theta) = \frac{1}{\sum\limits_{i,j} w_i^X w_j^Y \delta(\widehat{\vec{n}_i, \vec{n}_j} - \theta)} \sum_{i,j} w_i^X w_j^Y X_i Y_j \delta(\widehat{\vec{n}_i, \vec{n}_j} - \theta) \tag{2.4}$$

où X et Y sont les paramètres de Stokes I, Q, U et w les poids associés sur les pixels i et j ; la somme double se fait sur tous les pixels "touchés" de la carte et la fonction de Dirac nous assure l'écart angulaire.

Bien évidemment, X et Y doivent être mesurés dans le repère tangentiel à la géodésique reliant le pixel i au pixel j. Cependant, toutes les cartes faites représentent les paramètres de Stokes dans le repère propre $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{n})$ à chaque pixel. Considérons alors une paire de pixels, il faudra déterminer les angles de rotation (un pour chaque pixel) qui permettent de passer du repère naturel propre à chaque pixel au repère tangentiel et appliquer les relations d'algèbre (equation 1.18) des paramètres de Stokes. Alors seulement, prendre le produit des paramètres de Stokes, qui sont aussi indépendants du système de coordonnées. L'ajouter à la somme a un sens physique.

Le programme de calcul que j'ai codé effectue les opérations suivantes :

1. prendre en compte toutes les paires possibles à partir des trois cartes fournissant les paramètres de Stokes ;
2. pour chaque paire, calculer l'écart angulaire entre les deux pixels et les angles de rotation ;
3. une fois les angles de rotation et l'écart angulaire obtenus, calculer les nouveaux paramètres de Stokes pour les deux pixels de la paire ;
4. calculer la contribution aux six fonctions de corrélation de la paire considérée pour l'écart angulaire correspondant ;
5. normaliser les fonctions de corrélations obtenues.

Ainsi, le résultat sera l'estimation des six fonctions de corrélations en fonction de l'écart angulaire. Comme nous nous intéresserons aux corrélations à plusieurs dizaines de degrés, il n'est pas nécessaire de déconvoluer les effets du lobe qui a une largeur à mi-hauteur de 13 minutes d'arc.

2.2.2 Les propriétés du calcul dans l'espace réel

Dans le chapitre précédent, nous avons défini un estimateur des fonctions de corrélation. Cependant, il est essentiel de connaître le comportement de notre estimateur face aux contraintes expérimentales, en particulier la couverture du ciel. Il est donc nécessaire de connaître le biais et la variance de ce dernier.

Calcul du biais et de la variance

Les calculs présentés ci-dessous sont effectués dans l'hypothèse d'une expérience mesurant du CMB, qui ne couvre pas forcément tout le ciel mais qui n'est pas bruitée. Cependant, les résultats que j'énoncerai ci-dessous resterons exacts pour une expérience dont le bruit est décorrélé d'un pixel à l'autre ; le bruit se ramenant à un poids w qui ne dépend que du pixel. On supposera aussi que le bruit est décorrélé d'un paramètre de Stokes à un autre. Enfin, j'appellerai une expérience idéale, une expérience qui couvre la totalité du ciel, qui n'est pas bruitée et ne détecte que du CMB.

Le biais d'un estimateur se calcule de la manière suivante :

$$\lambda = \left\langle \hat{C}^{XY}(\theta) - C^{XY}(\theta) \right\rangle \tag{2.5}$$

où $\hat{C}^{XY}$ représente notre estimateur et C^{XY} la valeur "vraie" (la valeur "vraie" correspond à la somme pris sur tout le ciel). J'ai pu alors démontrer que le biais de cet estimateur est nul (voir annexe B, équation B.3).

Le calcul de la variance est quant à lui plus délicat. En effet pour calculer la variance, il faut considérer deux jeux de cartes A et B des paramètres de Stokes. La variance correspond alors à la moyenne du produit de notre estimateur pris sur les cartes A par notre estimateur pris sur les cartes B. Un mélange entre les pixels des cartes A et ceux des cartes B apparaît (equation 2.6 et annexe B) :

$$\begin{aligned}
var(\hat{C}^{XY}(\theta)) &= \left\langle (\hat{C}^{XY}(\theta_A) - C^{XY}(\theta_A))(\hat{C}^{XY}(\theta_B) - C^{XY}(\theta_B)) \right\rangle \\
var(\hat{C}^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\sum\limits_{\substack{i,j \\ m,n}} w_i^X w_j^Y w_m^X w_n^Y} \times \cdots \\
&\cdots \sum_{\substack{i,j \\ m,n}} w_i^X w_j^Y w_m^X w_n^Y (\langle X_i X_m \rangle \langle Y_j Y_n \rangle + \langle X_i Y_n \rangle \langle X_m Y_j \rangle)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où les indices i et j correspondent aux pixels des cartes A et m et n aux pixels des cartes B. On peut facilement comprendre le résultat obtenue en calculant la variance cosmique de la fonction de corrélation C^{XY} à partir des équations 1.27 et B.41. Prenons l'exemple de la corrélation entre intensité et mode Q :

$$var(C^{IQ}(\theta)) = \sum_{\ell} \left(\frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell^2(\cos\theta) \right)^2 \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} var(C_\ell^{TE}) \tag{2.7}$$

Comme les $a_{\ell m}^E$ et $a_{\ell m}^T$ sont supposés gaussiens, pour une expérience idéale (couverture totale du ciel et aucun bruit) la variance est donnée par :

$$var(C_\ell^{TE}) = \frac{1}{2\ell+1} \left((C_\ell^{TE})^2 + C_\ell^{TT}.C_\ell^{EE} \right) \tag{2.8}$$

La variance cosmique de la corrélation à un multipôle fixé ne dépendant pas des autres multipôles, nécessairement, en repassant dans l'espace réel, la variance cosmique à un écart angulaire donné dépend cette fois ci de la corrélation à tous les écarts angulaires possibles, et ceci même pour une expérience idéale. La variance de notre estimateur pour une expérience idéale est alors donnée par la variance cosmique :

$$\begin{aligned}
var(C^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\int \delta(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2} - \theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3,\vec{n}_4} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4} \times \cdots \\
&\cdots \int (C^{XX}(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_3}) C^{YY}(\widehat{\vec{n}_2,\vec{n}_4}) + C^{XY}(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_4}) C^{XY}(\widehat{\vec{n}_2,\vec{n}_3})) \cdots \\
&\cdots \delta(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2} - \theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3,\vec{n}_4} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Le résultat en ajoutant des poids se trouve dans l'annexe B.

Conséquences pour le calcul des fonctions de corrélations

Deux conclusions importantes ressortent de ces calculs :

1. il suffit d'obtenir des cartes dont le bruit est décorrélé d'un pixel à l'autre et d'un paramètres de Stokes à l'autre pour que notre estimateur nous fournisse une valeur non biaisée de la fonction de corrélation ;

2. pour une expérience idéale, la variance de l'estimateur devient la variance cosmique.

Le fait que l'estimateur ne soit pas biaisé est un avantage par rapport à un calcul direct des C_ℓ^{XY}. En effet, la multiplication par un poids se fait sur un pixel donné, donc sur une seule direction. En passant dans l'espace des harmoniques sphériques pour obtenir le spectre angulaire, le produit devient une convolution et le poids se répartit sur tous les multipôles, entraînant un biais dans l'estimation des C_ℓ^{XY}.

De plus, il est possible de trouver une solution pour les poids w qui minimise la variance de l'estimateur. En effet, pour une expérience dont le bruit est décorrélé de pixel à pixel, la variance est minimale si on choisit comme poids l'inverse de la variance des paramètres mesurés :

$$w^X_{optimum} = \frac{1}{var(X)} \tag{2.10}$$

Remarques

1. Le calcul direct et simple des fonctions de corrélation $C^{XY}(\theta)$ est beaucoup plus lent qu'un calcul direct du spectre angulaire C_ℓ^{XY}.
2. L'estimation directe du spectre angulaire étant elle aussi limitée par la variance cosmique, c'est pour des couvertures partielles du ciel que notre estimateur est avantageux.

2.2.3 Les résultats des simulations

Les propriétés énoncées dans le chapitre précédent peuvent être vérifiées grâce à des simulations numériques en comparant les fonctions de corrélation théoriques à celles obtenues à partir de l'estimateur. Les fonctions de corrélation théoriques seront prises à partir d'un modèle de CMB pur calculées grâce à CMBFAST [26, 28, 29]. J'ai alors procèdé ainsi :

1. CMBFAST fournit les spectres de puissance angulaire pour un modèle d'Univers choisi ;
2. en utilisant SYNFAST [35], je simule un jeu de cartes I, Q et U couvrant tout le ciel à partir de ces spectres ;
3. grâce à ANAFAST [35],on calcule directement les spectres angulaires à partir des cartes SYNFAST ;
4. je déduis de ces spectres les fonctions de corrélation dans l'espace direct ;
5. à partir des cartes SYNFAST on crée de nouvelles cartes, toujours pures en CMB, mais limitées en couverture et multipliées par des poids selon ARCHEOPS ;
6. je calcule les fonctions de corrélations à partir de ces nouvelles cartes avec notre estimateur ;
7. les deux résultats sont comparés.

Compte tenu de la variance cosmique, SYNFAST ne fournit à partir d'un modèle de CMBFAST qu'une réalisation possible du ciel. Pour toutes les études ci-dessous, on utilisera à chaque fois la moyenne statistique prise sur un grand nombre, de l'ordre du millier, de simulations.

Vérification de l'estimateur

Bien évidemment, le premier test constitait à s'assurer que nous calculions bien l'estimateur. Je devais en particulier m'assurer que les angles de rotation d'un repère à l'autre étaient les bons. On peut voir sur la figure 2.3 que les corrélations C^{II} et C^{IQ} sont bien en accord avec les modèles théoriques. On remarque aussi que l'on trouve bien une corrélation C^{IU} nulle pour du CMB pur, ce qui prouve bien que les angles calculés sont exactes. Les courbes théoriques sont obtenues avec ANAFAST avec une couverture totale. Les fonctions de corrélation sont estimées ici avec une couverture totale.

Vérification du biais

Pour vérifier que le biais est nul, il me suffis de comparer les fonctions de corrélations moyennées obtenues avec ANAFAST sur une carte complète aux résultats fournis par notre méthode sur une carte ne couvrant pas la totalité du ciel.

Un autre test consiste à prendre en plus les poids optimum pour l'expérience ARCHEOPS. Ce test est aussi indispensable car les poids optimum doivent eux aussi subir des transformations puisque la variance

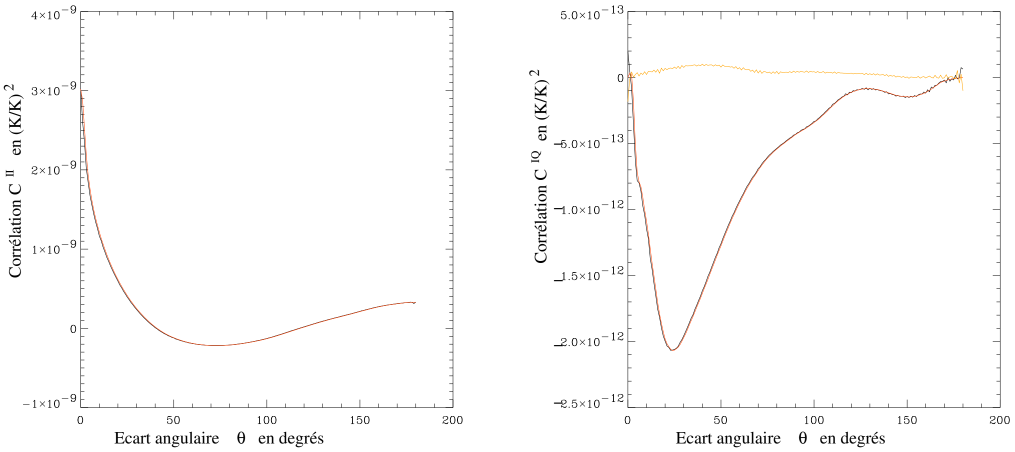


FIG. 2.3 – Comparaison entre les corrélations théoriques (noire) et les corrélations estimées pour une expérience idéale (rouge). Il y a une bonne concordance entre théorie et estimation. On peut aussi vérifier que la corrélation C^{IU} (or) est bien nulle

des paramètres de Stokes est mesurée dans le repère propre à chaque pixel. Les transformations sont les suivantes, pour du bruit décorrélés de pixel à pixel :

$$\begin{aligned} w^I &= w^I_{\text{mesuré}} \\ w^Q &= \frac{w^Q_{\text{mesuré}} w^U_{\text{mesuré}}}{\cos^2(2\psi) w^U_{\text{mesuré}} + \sin^2(2\psi) w^Q_{\text{mesuré}}} \\ w^U &= \frac{w^U_{\text{mesuré}} w^Q_{\text{mesuré}}}{\cos^2(2\psi) w^Q_{\text{mesuré}} + \sin^2(2\psi) w^U_{\text{mesuré}}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

où l'angle ψ est l'angle permettant de passer du repère propre au repère tangentiel.

Les résultats de ces tests sont représentés sur la figure 2.4 où la moyenne est prise sur mille simulations. La corrélation obtenue avec ANAFAST sur une carte complète représente la fonction de corrélation vraie. A titre d'indication la corrélation obtenue en passant par les C_ℓ sur une carte non complète est représentée sur la figure 2.4 ; le biais apparaît clairement dans ce cas-ci.

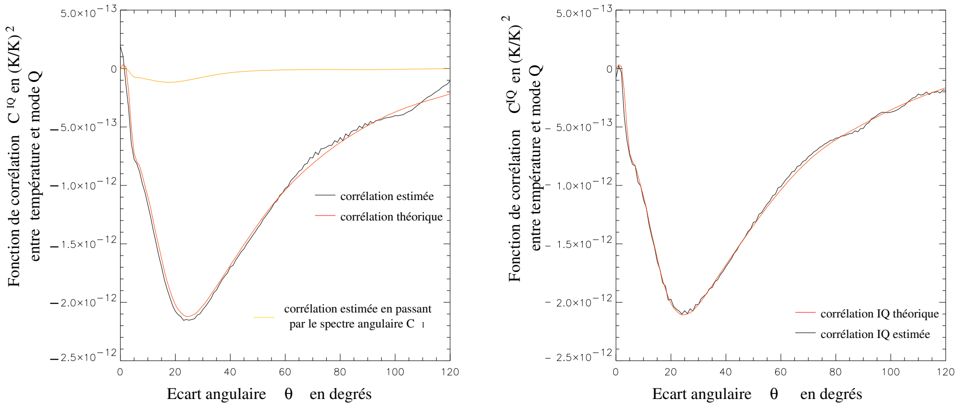


FIG. 2.4 – *Gauche :* comparaison entre la moyenne statistique de la fonction de corrélation $C^{IQ}(\theta)$ vraie (rouge) obtenue grâce à ANAFAST et la moyenne statistique de l'estimation obtenue avec une couverture de type ARCHEOPS (noir) ; l'estimateur n'est pas biaisé. La corrélation $C^{IQ}(\theta)$ obtenue en passant par les C_ℓ^{TE} avec une couverture ARCHEOPS est aussi représenté (or) ; dans ce cas ci un biais apparaît. *Droite :* même comparaison en utilisant une couverture ARCHEOPS et un poids optimum calculé à partir des données ARCHEOPS ; là encore l'estimateur n'est pas biaisé.

Vérification de la variance

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le calcul analytique de la variance est difficile. Les tests numériques sont donc d'une grande importance. Là encore, un grand nombre de simulations sont effectuées et la variance de notre estimateur est donnée par la variance statistique :

$$var(\hat{C}^{XY}(\theta)) = \frac{1}{N_{simu}} \sum_{i=1}^{N_{simu}} \left(\hat{C}_i^{XY}(\theta)\right)^2 - \left(\frac{1}{N_{simu}} \sum_{i=1}^{N_{simu}} \hat{C}_i^{XY}(\theta)\right)^2 \tag{2.12}$$

J'ai tout d'abord vérifié que pour une expérience idéale, la variance de notre estimateur était bien la variance cosmique. La figure 2.5 montre la variance de notre estimateur pour 100 simulations et la variance cosmique : on observe un très bon accord entre les deux courbes.

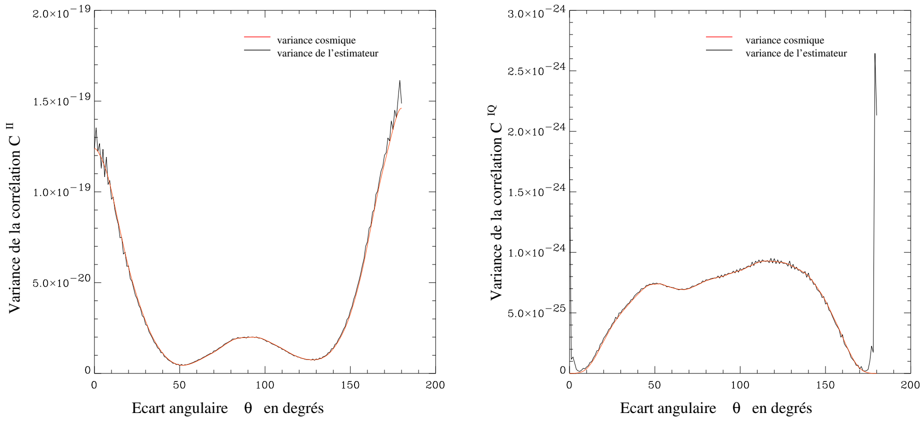


FIG. 2.5 – *Gauche :* comparaison entre la variance cosmique (rouge) et la variance statistitique (noir) de notre estimateur de l'auto-corrélation Intensité-Intensité dans le cas d'une expérience idéale ; *droit :* même comparaison pour la corrélation IQ.

Le principe d'ergodocité impose que la variance de l'estimateur ne dépend pas du nombre de simulations. Cette propriété se vérifie en étudiant la dépendance de la variance avec le nombre de simulations pour différents écarts angulaires et pour la moyenne sur tous les écarts angulaires. L'indépendance de la variance est bien vérifiée à partir de 250 simulations (figure 2.6).

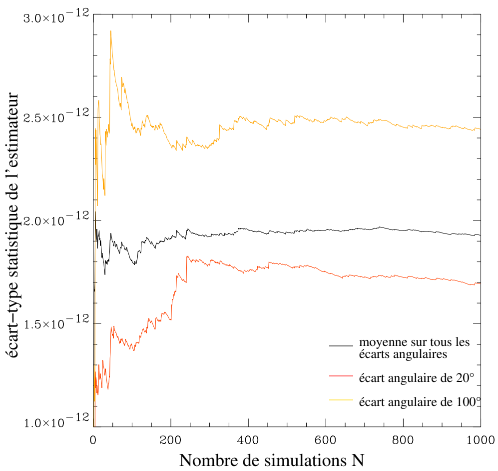


FIG. 2.6 – Ecart-type en fonction du nombre de simulations N ; la constance de l'écart-type, donc de la variance, est bien vérifiée à partir de N=250 quelque soit l'écart angulaire.

Résultat final et remarques

1. Tous les résultats présentés sont illustrés en utilisant un modèle cosmologique, cependant ces conclusions ne dépendent pas du modèle choisi.
2. Le modèle choisi est celui qui correspond le mieux aux données WMAP à savoir un modèle ΛCDM avec une profondeur optique $\tau = 0.17$ due à la reionisation.
3. Le calcul direct des fonctions de corrélation est plus lent qu'un calcul direct des C_ℓ, c'est pourquoi cette méthode s'emploiera essentiellement pour des expériences qui n'ont pas une couverture totale du ciel ou si l'étude se limite à une certaine partie du ciel.
4. Les corrélations II et IQ pour une couverture du ciel de type ARCHEOPS avec un poids en $\frac{1}{var(X)}$ sont présentées en figure 2.7 avec leur variance, ce résultat est obtenu avec une moyenne sur 1000 simulations. Le pic de l'écart-type aux alentours de 100° correspond à une diminution du nombre de paires de pixels provenant de la coupure du plan galactique ($w = 0$ pour les latitudes entre -20° et 20°).
5. La variance de notre estimateur (var_{estim}) pour une couverture de type ARCHEOPS est supérieure à la variance d'une expérience couvrant tout le ciel comme WMAP (var_{WMAP}). En effet, pour la corrélation IQ $var_{WMAP} \approx 1.5\mu K^2$ (figure 2.8), et $var_{estim} \approx 4\mu K^2$ (figure 2.7). On a donc $\frac{var_{WMAP}}{var_{estim}} \approx 0.35$, ce qui correspond bien approximativement à la couverture d'ARCHEOPS.

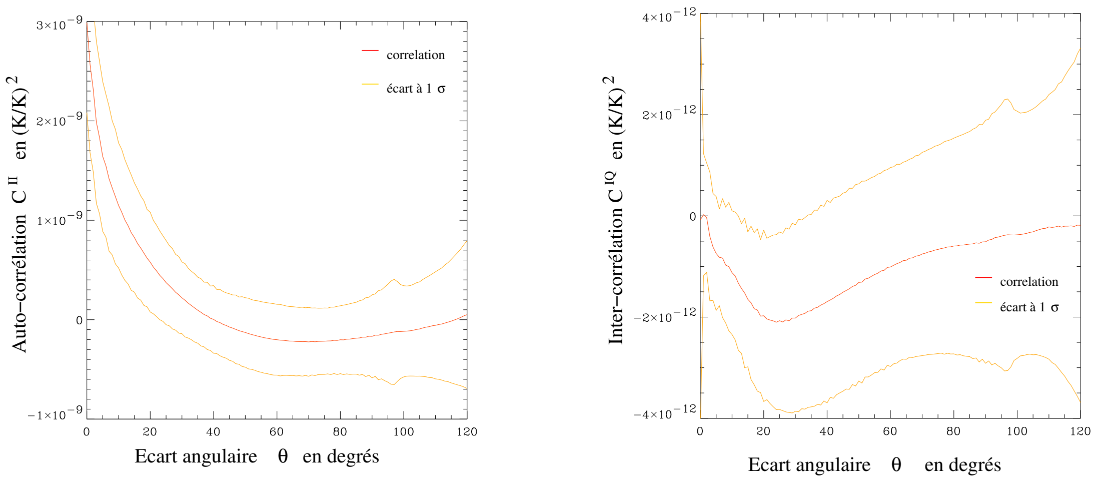


FIG. 2.7 – *Gauche :* corrélations II et écart à 1 σ pour un modèles ΛCDM avec une profondeur optique $\tau = 0.17$ à partir de cartes ne couvrant pas la totalité du ciel avec un poids optimum. *Droit :* corrélation IQ et écart à 1 σ dans les mêmes conditions.

2.3 Application aux données de l'expérience ARCHEOPS

Les données prises par le satellite WMAP ont permis de contraindre fortement les paramètres décrivant la reionisation grâce à l'étude du spectre de puissance angulaire TE. Cependant, ce résultat se base sur l'hypothèse que les donnés ne sont pas contaminées par le rayonnement de la poussière galactique. A partir des données à 353 GHz de l'expérience ballon ARCHEOPS, il est possible d'évaluer la contribution de la poussière galactique aux résultats de WMAP.

Dans un premier temps, je présenterai brièvement les résultats obtenus par WMAP. Ensuite, nous nous pencherons sur l'évaluation de la corrélation IQ due à la poussière galactique à partir des données d'ARCHEOPS. Cette évaluation nécessitant la prise en compte des effets de filtrage sur les cartes et du calcul des barres d'erreurs.

2.3.1 Les résultats de WMAP

Aprés une année de prise de données, WMAP a pu fournir une mesure de la fonction de corrélation entre l'intensité et le mode Q de polarisation (figure 2.8). Le spectre de puissance angulaire a pu alors être contraint à partir de cette mesure (figure 1.10).

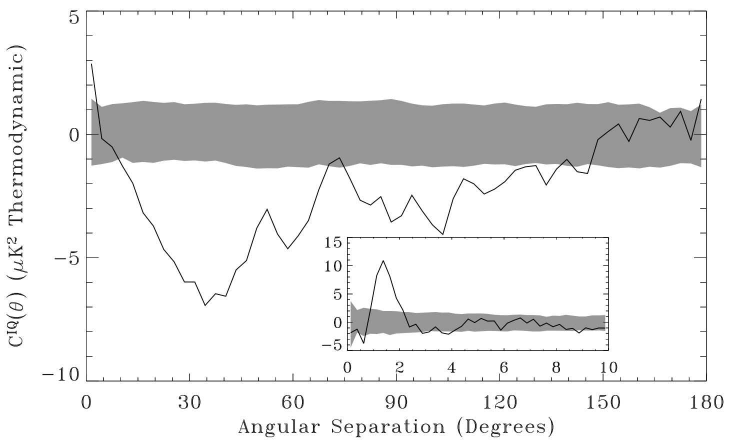


FIG. 2.8 – Corrélation IQ mesurée par WMAP en $\frac{(\mu K)^2}{K}$ [18].

La fonction de corrélation IQ a été obtenue en additionnant des cartes faites à partir de mesures prises à 41, 61 et 94 GHz. De telles cartes ne sont *a priori* pas affectées par l'émissions de la poussière galactique [18] (figure 2.1). Cependant, ceci n'étant qu'une hypothèse, nous nous proposons de la tester grâce aux données d'ARCHEOPS. Une confirmation de leur hypothèse de départ est importante car les résultats sur C_ℓ^{TE} de WMAP montre un point à trés bas ℓ (figure 1.10) de forte amplitude qui pourrait être du à la reionisation. Il est donc nécessaire de confirmer que ce point n'est pas affecté par un effet systématique comme l'emission polarisée de la poussière galactique.

2.3.2 Evaluation de la corrélation IQ due à la poussière galactique

Pour confirmer que la corrélation entre température et mode Q n'est pas bruitée par l'emission de la poussière galactique, il m'a fallu évaluer la fonction de corrélation IQ de la poussière galactique dans les conditions suivantes :

1. à hautes latitudes galactiques pour ne pas être contaminé par l'emission trés intense du plan galactique ;
2. obtenir un résultat au fréquence de fonctionnement de WMAP. L'emission de poussière galactique étant la plus intense à 94 GHz, on l'evaluera à cette fréquence.

J'ai donc estimé la fonction de corrélation de la poussière galactique à partir des données ARCHEOPS de la manière suivante :

1. j'ai calculé tout d'abord cette corrélation à 353 GHz avec les cartes obtenues dans le chapitre 2.1.3 en prenant soin de masquer le plan galactique (figure 2.9) ;

2. j'ai ensuite calculé cette corrélation en utilisant les cartes Q et U polarisées obtenues avec les données ARCHEOPS et la carte d'intensité de la poussière galactique obtenue par Schlegel *et al.* [36], on s'affranchie ainsi des éventuelles corrélations dues au bruit ;
3. enfin, les données ARCHEOPS étant à 353 GHz, j'ai extrapôlé le résultat à 94 GHz.

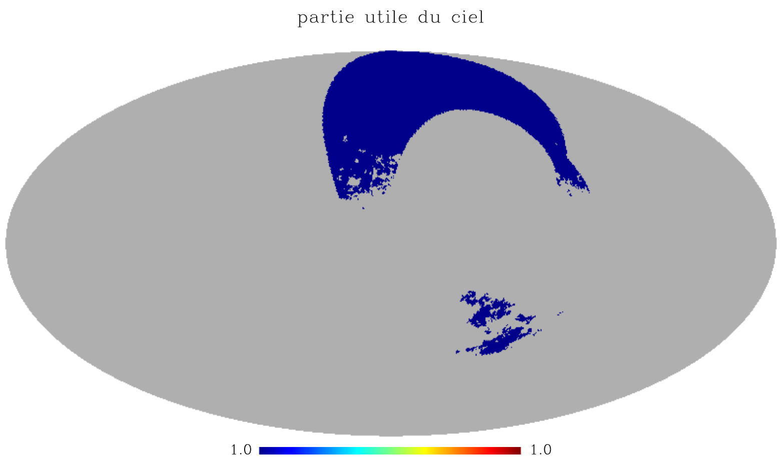


FIG. 2.9 – Partie du ciel utilisée pour calculer la fonction de corrélation IQ à partir des données de l'expérience ARCHEOPS, cette partie est choisie afin de couper le plan galactique qui est un contaminant pour notre évaluation.

Les cartes utilisées sont en millikelvin Rayleigh-Jeans. On observe bien alors que la corrélation obtenue avec la carte Schlegel *et al.* est moins bruitée que celle avec les données ARCHEOPS uniquement (figure 2.10). La corrélation calculée étant en $(mK_{RJ})^2$, on extrapôle à 94 GHz en appliquant directement la loi d'émissivité :

$$\langle I(\vec{n}_1).Q(\vec{n}_2)\rangle_1 = \langle I(\vec{n}_1).Q(\vec{n}_2)\rangle_0 \left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^4 \tag{2.13}$$

A 94 GHz, les mK_{RJ} sont équivalents à des mK_{CMB}, et il est alors possible de comparer directement le résultat obtenu aux résultats de WMAP (figure 2.10).

Il m'a été aussi possible de calculer la corrélation entre l'intensité et le paramètre U. Dans ce cas aussi (figure 2.10), les corrélations obtenues en utilisant uniquement les données ARCHEOPS sont plus bruitées que celles calculées à partir de la carte Schlegel en intensité et des cartes ARCHEOPS en polarisation.

Il est nécessaire, pour bien évaluer la corrélation angulaire de l'émission de la poussière galactique grâce aux courbes obtenues (figure 2.10), de connaître la contribution du filtrage appliqué aux données et estimer l'erreur sur notre résultat.

2.3.3 Effet du filtrage

L'estimation des fonctions de corrélations à partir de cartes dépend de la manière dont ces dernières sont obtenues. En effet si certains traitements sont appliqués aux données ou aux cartes avant leur utilisation pour le calcul, alors ces traitements se répercutent *a priori* sur les fonctions de corrélations estimées. Les courbes tracées sur la figure 2.10 représentent donc les corrélations IQ et IU des données d'ARCHEOPS modifiées par le traitement en ondelette et le destriage.

L'estimation de l'effet de ce filtrage sur les fonctions de corrélations est difficile à réaliser de manière théorique puisqu'il s'agit d'une convolution entre la fonction de filtre, qui est inconnue, et les fonctions de corrélation. Pour estimer cet effet de manière quantitative, l'espace des harmoniques sphériques est plus approprié. Nous envisageons d'utiliser SPICE-POL [38] qui calcul rapidement et sans biais les spectres de puissance angulaire.

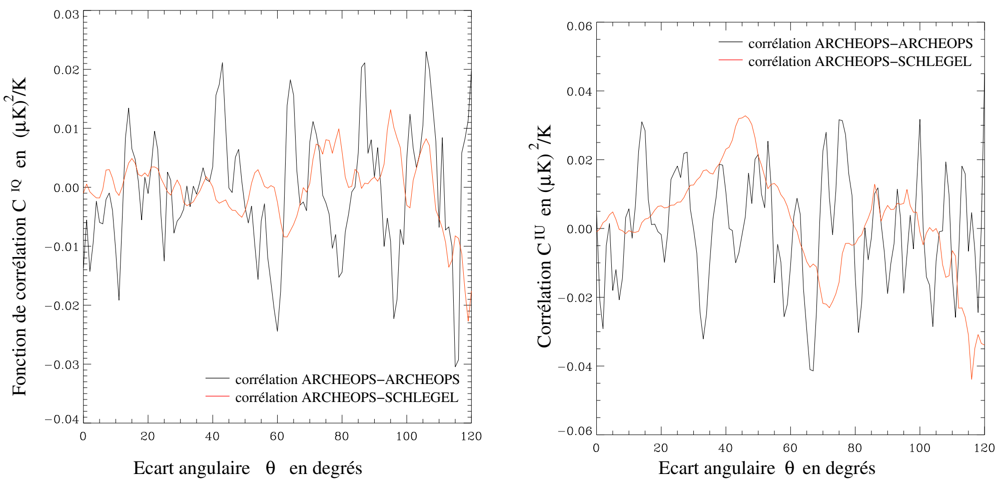


FIG. 2.10 – *Gauche :* fonction de corrélation IQ extrapolée à 94 GHz en $(\mu K)^2/K$ obtenue avec les données ARCHEOPS seules (noir) et en corrélant les cartes Q et U ARCHEOPS à la carte en intensité de Schlegel *et al.*, il y a nettement moins de bruit en utilisant la carte de Schlegel *et al.*. *Droite :* même résultat pour la corrélation IU. Les unités sont identiques à celles utilisées par WMAP (figure 2.8).

Il est tout de même possible d'avoir une idée qualitative de l'effet du filtrage à l'aide de plusieurs simulations :

1. à partir de cartes I, Q et U de CMB pur, on en déduit les TOI que ARCHEOPS nous aurait fournit à partir d'un tel ciel ;
2. on retrace des cartes selon la méthode exposée dans le chapitre 2.1.3 et on calcul les fonctions de corrélations ;
3. on applique le filtre en ondelette sur les TOI obtenues et on calcul les nouvelles corrélations ;
4. les différences entre les fonctions de corrélation reflètent l'effet du traitement.

Cependant, l'utilisation de TOI nécessite beaucoup de temps. L'effet du filtrage est en cours d'étude.

En ce qui concerne le destriage, il est tout de même possible d'évaluer à partir de quelle échelle angulaire son effet se fait ressentir. Le destriage correspond à un filtre passe-haut de fréquence de coupure $2 \times f_{spin} = 0.066$ Hz. Comme un tour de la nacelle correspond à un écart angulaire de 135°, ce destriage coupe les échelles angulaire supérieures à 67.5°. Or la corrélation mesurée par WMAP piquant à -7 $(\mu K)^2/K$ à environ 37°. Notre réultat et les conclusions que nous en tirerons concernant une éventuelle contamination des données WMAP, ne seront pas affectés par le destriage jusqu'à une échelle angulaire de 67.5°.

2.3.4 Calcul des barres d'erreurs

Pour pouvoir répondre de manière précise et définitive à la question posée en début de chapitre, à savoir si les données WMAP sont contaminées ou non par l'émission de la poussière galactique, il est nécessaire de déterminer les barres d'erreurs des corrélations IQ. Pour cela, il est nécessaire de faire plusieurs simulations de cartes I, Q et U de type ARCHEOPS, c'est à dire des cartes du rayonnement de la poussière et y ajouter du bruit, puis estimer les fonctions de corrélations qui en résultent.

Pour cela, j'ai codé un programme qui effectue les étapes suivantes :

1. création des cartes de CMB avec SYNFAST ;
2. création de cartes de l'émission de la poussière en se fixant un degré de polarisation et un champ magnétique
3. création de TOI de signal de type ARCHEOPS à partir des cartes I, Q et U ;
4. création d'une TOI de bruit de type ARCHEOPS qu'on ajoute à la TOI du signal ;
5. création de cartes à partir des TOI créées.

Les modèles de poussière galactique choisis

Pour simuler des cartes d'émission de poussière galactique, j'ai supposé que les grains étaient totalement alignés par le champ magnétique galactique. Comme leur alignement se fait orthogonalement au champ magnétique, la direction de la polarisation est perpendiculaire au champ et à la direction de visée. En partant d'un champ magnétique $\vec{B}$ donné et d'un degré de polarisation p on peut déduire U et Q[2] :

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{Q(\vec{n})}{U(\vec{n})}\right) \\ Q(\vec{n}) &= p\cos(2\gamma)I(\vec{n}) \\ U(\vec{n}) &= p\sin(2\gamma)I(\vec{n}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

où $\vec{n}$ est la direction d'observation. L'intensité I s'obtient à partir d'une carte Schlegel.

Les corrélations simulés

J'ai choisi deux types de champ magnétique pour simuler l'émission de la poussière, le degré de polarisation étant fixé à 30 % :

1. un champ toujours colinéaire à $\vec{e}_\phi$;
2. un champ extrapôlé du champ mesuré par Heiles [37].

Cependant, choisir un champ magnétique toujours colinéaire aux parallèles n'est pas trés réaliste et l'extrapôlation des données de Heiles, pour être réaliste, manque de précision : un pixel des cartes créées correspondant à une résolution angulaire de 7°. Une solution alternative peut être de simuler des cartes avec SYNFAST à partir de spectres de puissance angulaire de l'émission de la poussière galactique. Prunet *et al.*[33] propose des spectres angulaires en puissance de ℓ à partir de cartes tri-dimensionnelle de distribution de HI [34] :

$$C_\ell^{TT} = 8005 \times \ell^{-3} (\mu K)^2 \tag{2.15}$$

$$C_\ell^{EE} = 8.9 \times 10^{-4} \times \ell^{-1.3} (\mu K)^2 \tag{2.16}$$

$$C_\ell^{BB} = 1.0 \times 10^{-3} \times \ell^{-1.4} (\mu K)^2 \tag{2.17}$$

$$C_\ell^{TE} = 1.7 \times 10^{-2} \times \ell^{-1.95} (\mu K)^2 \tag{2.18}$$

Pourtant, une modélisation en ℓ^{-3}, pour le spectre en intensité n'est valable qu'à haut ℓ. Les cartes créées étaient alors difficilement utilisable lorsqu'on se limitait à une couverture ARCHEOPS[3].

Création de cartes bruitées

Pour être le plus réaliste possible, je devais créer des cartes bruitées avec un bruit de type ARCHEOPS. Une fonction était déjà disponible pour créer une timeline de bruit de type ARCHEOPS à partir des données ARCHEOPS. La solution la plus simple est alors la suivante :

1. à partir des cartes créées I, Q, U du CMB et de la galaxie, les additionner pour ne faire qu'un seul jeu de trois cartes ;
2. créer une TOI pour chacun des six bolomètres à 353 GHz de ARCHEOPS avec ces cartes ;
3. créer une TOI de bruit ARCHEOPS pour chacun des six bolomètres à 353 GHz ;
4. sommer les TOI de signal à celles de bruit ;
5. refaire des cartes avec la méthode de projection ARCHEOPS.

La réalisation de cartes bruitées est trés contraignante pour deux raisons :

1. comme nous l'avons vu précédemment, l'utilisation de TOI nécessite du temps ;
2. il est nécessaire de créer des TOI pour chaque bolomètre qui correspondent à du bruit décorrélé afin d'utiliser la méthode projection établie par les membres d'ARCHEOPS [14].

Pour ces raisons, la détermination de ces barres d'erreurs n'est qu'en cours d'étude.

[2] Pour le lecteur désireux d'une étude plus détaillée, je le renvoie à l'annexe C et aux références [31, 32]

[3] Le lecteur pourra toutefois trouver le résultat d'une simulation à partir des spectres de puissance angulaire pour l'émission de la poussière galactique en annexe C

2.3.5 Conclusions et remarques

1. Il est important d'extrapôler à partir des mK_{RJ}, car cette unité est directement reliée au flux et nous permet donc d'utiliser la loi d'émissivité en ν^2.
2. Dans ce travail, aucune barre d'erreur ne sont présentes, leur détermination en cours d'étude nécessitant plusieurs simulations dont j'ai présenté la méthode dans le chapitre précédent.
3. En utilisant la carte de Schlegel, il semblerait que certaines corrélations apparaissent (figure 2.10), cependant il est nécessaire de mener une étude plus approfondie des fonctions de corrélations avec des barres d'erreurs pour conclure quant à ces éventuelles corrélations (elles peuvent trés bien être fortuites).
4. Si une corrélation IQ due à l'émission de la poussière galactique existe, son amplitude est alors nécessairement inférieure à quelques centièmes de $(\mu K)^2/K$.
5. Enfin, les résultats de WMAP ne sont pas contaminés par l'émission de la poussière galactique, la limite supérieure sur la poussière galactique étant de l'ordre de quelques centièmes de $(\mu K)^2/K$ alors que les corrélations mesurées par WMAP sont de l'ordre de quelques $(\mu K)^2/K$.

Conclusion

L'expérience ballon ARCHEOPS avait pour but de mesurer les anisotropies du CMB sur une zone $20 < \ell < 800$. La présence de six bolomètres polarisées à 353 GHz a aussi permis la détection de la polarisation de l'émission de la poussière galactique qui est l'une des principales émissions d'avant-plan pour la mesure de la polarisation du CMB. Une bonne connaissance de la polarisation de cette émission, en particulier des fonctions de corrélation résultantes, est donc indispensable pour les futures expériences comme le satellite PLANCK-HFI.

Pour étudier ces fonctions de corrélations, nous avons défini un estimateur qui se calcule directement dans l'espace réel à partir de cartes des paramètres de Stokes. Nous avons pu montrer, grâce à une étude théorique et des tests à l'aide de simulations que cet estimateur n'est pas biaisé. Il est particulièrement intéressant pour les études à partir de cartes qui ne couvrent pas la totalité du ciel puisqu'un calcul direct des spectres de puissance angulaire est quant à lui biaisé.

Appliquer cet estimateur aux données d'ARCHEOPS a permis de placer une première limite supérieure sur l'amplitude d'une éventuelle corrélations entre l'intensité et le mode Q de polarisation d'une telle émission : à 94 GHz, cette corrélation est inférieure à quelques centièmes de $(\mu K)^2/K$. Le même ordre de grandeur est obtenu pour la corrélation entre intensité et mode U de polarisation.

Ce résultat permet aussi de confirmer que la corrélation IQ du CMB mesurée par WMAP à 94 GHz est trés faiblement contaminée par le rayonnement de la poussière galactique.

Finalement, cette première étude permet de nous renseigner sur une des principales émissions d'avant-plan du futur satellite PLANCK-HFI dont ARCHEOPS constitue un banc de test.

Bibliographie

[1] G. Gamow, Phys. Rev., 70 :572, (1946)

[2] R.A. Alpher, R.C. Herman, Phys. Rev.,75 :1089, (1949)

[3] R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll, D.T. Wilkinson, AP.J.,42 :419, (1965)

[4] A.A. Penzias, R. Wilson, Ap.J., **142**, 419, (1965)

[5] J.A Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, (1999)

[6] A. Friedmann, Zeit. f. Physik, 10 :377, (1922)

[7] A. Friedmann, Zeit. f. Physik, 21 :326, (1924)

[8] E. P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci., 15 :168, (1929)

[9] H. P. Robertson, Proc. Nat. Acad. Sci., 15 :822, (1929)

[10] A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 42 :90, (1935)

[11] W.L. Freedman, B.F. Madore, B.K. Gibson *et al.*, Ap.J., **553**, 47, (2001)

[12] A. Benoît *et al.*, 2003a A & A, 399, L19

[13] A. Benoît *et al.*, 2003b A & A, 399, L25

[14] A. Benoît *et al.*, A & A soumis, **astro-ph/0306222**, (2003)

[15] G. Aldering *et al.*, (2002), **astro-ph/0209550**

[16] D.N. Spergel *et al.*, (2003), **astro-ph/0302209**

[17] C. L. Bennett *et al.*, 2003 Ap.J. soumis, **astro-ph/0302208**

[18] A. Kogut *et al.*, 2003 Ap.J. soumis, **astro-ph/0302213**

[19] A. Kogut, G. Hinshaw, Ap. J., **543**, (2000)

[20] L. Verde *et al.*, MNRAS, 335, 432, (2002)

[21] L. Verde *et al.*, 2003 Ap.J. soumis

[22] A. Kosowsky, NewAR., **43**, 157K, (1999)

[23] M. Kamionkowsky, A. Kosowsky, A. Stebbins, Phys. Rev. D. **55**, 7368, (1997), **astro-ph/9611125**

[24] N. Ponthieu, Thèse de Doctorat, *Etude de la polarisation du Fond Diffus Cosmologique et de l'émission polarisée des poussière galactiques*, U.J.F., (2003)

[25] M. Zaldarriaga, U. Seljak, Phys. Rev. D. **55**, 1830, (1997)

[26] M. Zaldarriaga, Ph.D. thesis, *Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, M.I.T, (1998), **astro-ph/9806122**

[27] M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D. **64**, 3001, (2001)

[28] U. Seljak, M. Zaldarriaga, Ap. J., **469**, 437, (1996)

[29] M. Zaldarriaga, U. Selja, E. Bertschinger, Ap. J., **494**, 491, (1998)

[30] F. Boulanger *et al.*,A & A, **312**, 256, (1996)

[31] R.H. Hildebrand, M. Dragovan, Ap.J., **450**, 663, (1995)

[32] H. M. Lee, B. T. Draine, Ap.J., **290**, 211, (1985)

[33] S. Prunet, S.K. Sethi, F.R. Bouchet, M.A. Miville-Deschenes, A & A, **339**, 187, (1998)

[34] D. Hartmann, W. B. Burton, *Atlas of Galactic HI emission*, Cambridge University Press, (1995)

[35] K. M. Gorsky *et al.*, **astro-ph/9905275**, (1999)

[36] D. Schlegel, D. Finkbeiner, M. Davis, Ap.J., **500**, 525, (1998)

[37] C. Heiles, AJ., 119, 923, (2000)

[38] G. Chon, A. Challinor, S. Prunet, E. Hivon, I. Szapudi, MNRAS soumis, **astro-ph/0303414**, (2003)

[39] K. Ganga, Ph.D. thesis, *Exploring the large scale anisotropy in the Cosmic Microwave Background Radiation at 170 GHz*, Princeton University, (1994)

Annexe A

Quelques fonctions et définitions utiles

A.1 Les fonctions $F_{1,\ell,m}$ et $F_{2,\ell,m}$

Dans le chapitre 1.2.3, le lien entre les fonctions de corrélations des paramètres de Stokes dans l'espace réel et les spectres de puissance angulaire des champs T, E et B est déterminé à l'aide de deux fonctions $F_{1,\ell,m}$ et $F_{2,\ell,m}$. Zaldarriaga [26] a dérivé la forme analytique de ces fonctions qui s'obtiennent à partir des polynômes de Legendre :

$$
\begin{aligned}
F_{1,\ell,m}(\theta) &= 2\left(\frac{(\ell-2)!(\ell-m)!}{(\ell+2)!(\ell+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\left[\frac{\ell-m^2}{\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\ell(\ell-1)\right]P_\ell^m(\cos\theta)+(\ell+m)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}P_{\ell-1}^m(\cos\theta)\right] \\
F_{2,\ell,m}(\theta) &= 2\left(\frac{(\ell-2)!(\ell-m)!}{(\ell+2)!(\ell+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{m}{\sin^2\theta}\left[-(\ell-1)\cos\theta P_\ell^m(\cos\theta)+(\ell+m)P_{\ell-1}^m(\cos\theta)\right] \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

Ces fonctions dérivent directement de la décomposition selon les harmoniques sphériques de spin des composantes Q et U des paramètres de Stokes.

A.2 Le lien entre valeur moyenne et la fonction de corrélation

Les fonctions de corrélations sont définies de la manière suivante, en appelant θ l'angle formé par les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ et i et j les indices du pixel correspondant respectivement à la direction $\vec{n}_1$ et à la direction $\vec{n}_2$:

$$
\begin{aligned}
C^{XY}(\theta) &= \langle X(\vec{n}_1)Y(\vec{n}_2)\rangle &&= \langle X(\vec{n}_2)Y(\vec{n}_1)\rangle \\
&= \langle X_iY_j\rangle &&= \langle X_jY_i\rangle
\end{aligned}
$$

On peut établir le même genre de relation dans le cas des spectres de puissance angulaire :

$$
\begin{aligned}
C_\ell^{XY} &= \left\langle a_{\ell m}^X a_{\ell m}^{Y\ *}\right\rangle \\
&= \left\langle a_{\ell m}^Y a_{\ell m}^{X\ *}\right\rangle \qquad \text{(A.2)} \\
&= \frac{1}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^X a_{\ell m}^{Y\ *}
\end{aligned}
$$

Toutes ces valeurs moyennes peuvent aussi bien être prises comme statistiques que comme ergodiques.

Annexe B

Biais et Variance des fonctions de corrélation

Il m'a été possible de dériver le biais et la variance de l'estimateur des fonctions de corrélation dans l'espace réel de manière analytique. Dans cette annexe, le calcul complet de ces deux quantités est présenté.

B.1 Calcul du biais

Je repars de l'expression générale du biais et de celle de mon estimateur :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{XY}(\theta) &= \frac{1}{\sum\limits_{i,j} w_i^X w_j^Y \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)} \sum_{i,j} w_i^X w_j^Y X_i Y_j \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta) \\
\lambda &= \left\langle \hat{C}^{XY}(\theta) - C^{XY}(\theta) \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Prendre la valeur moyenne est une opération linéaire et les seuls variables aléatoires sont X_i et Y_j, le biais prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{\sum\limits_{i,j} w_i^X w_j^Y \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)} \sum_{i,j} w_i^X w_j^Y \langle X_i Y_j \rangle \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta) - \cdots \\
&\cdots \frac{1}{\sum\limits_{i,j} \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)} \sum_{i,j} \langle X_i Y_j \rangle \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Or, compte-tenue du principe d'ergodicité la quantité $\langle X_i Y_j \rangle$ est exactement la corrélation C_θ^{XY} ; quantité qui ne dépend plus des indices i et j. On obtient donc le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda &= C^{XY}(\theta) \left(\frac{1}{\sum\limits_{i,j} w_i^X w_j^Y \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)} \sum_{i,j} w_i^X w_j^Y \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta) - \cdots \right. \\
&\left. \cdots \frac{1}{\sum\limits_{i,j} \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta)} \sum_{i,j} \delta(\vec{n}_i \vec{n}_j - \theta) \right) \\
\lambda &= 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Notre estimateur est non-biaisé.

B.2 Calcul de la variance

Variance cosmique

La première étape pour calculer la variance est de connaître la variance cosmique. Regardons tout d'abord cette varaince dans l'espace des harmoniques sphériques où le calcul est plus simple et prenons l'exemple du spectre angulaire TE. Compte-tenu du principe d'ergodicité :

$$C_\ell^{TE} = \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} \right\rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} \tag{B.4}$$

On peut alors écrire la variance ainsi :

$$\begin{aligned} var(C_\ell^{TE}) &= \left(\frac{1}{2\ell+1}\right)^2 \sum_{m=-\ell}^{\ell} var(a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*}) \\ var(a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*}) &= \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} . a_{\ell m}^E . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle - \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} \right\rangle . \left\langle a_{\ell m}^E . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle \end{aligned} \tag{B.5}$$

Les $a_{\ell m}^X$ étant centrés la moyenne du produit des quatres $a_{\ell m}^X$ peut s'écrire ainsi [39] :

$$\begin{aligned} \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} . a_{\ell m}^E . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle &= \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} \right\rangle . \left\langle a_{\ell m}^E . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle + \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle . \left\langle a_{\ell m}^{E\;*} . a_{\ell m}^E \right\rangle + \cdots \\ &\cdots \left\langle a_{\ell m}^T . a_{\ell m}^{E\;*} \right\rangle . \left\langle a_{\ell m}^E . a_{\ell m}^{T\;*} \right\rangle \end{aligned} \tag{B.6}$$

On reconnaît aisément les différents spectres de puissance angulaire (équation A.3), qui eux ne dépendent plus de m :

$$\begin{aligned} var(C_\ell^{TE}) &= \left(\frac{1}{2\ell+1}\right)^2 \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left((C_\ell^{TE})^2 + C_\ell^{TT}.C_\ell^{EE}\right) \\ var(C_\ell^{TE}) &= \frac{1}{2\ell+1} \left((C_\ell^{TE})^2 + C_\ell^{TT}.C_\ell^{EE}\right) \end{aligned} \tag{B.7}$$

Il est alors trés facile d'obtenir la variance cosmique de la fonction de corrélation dans l'espace réel à partir des relations donné par Zaldarriaga [26]. Ce résultat est déjà présenté dans le chapitre 2.2.2. Cependant, j'ai pu aussi dériver une autre expression de la variance cosmique de la fonction de corrélation dans l'espace réel en m'inspirant du calcul de Ganga pour la variance de son estimateur [39]. Partons de la définition de la fonction de corrélation entre le paramètre X et le paramètre Y, toujours en s'appuyant sur le principe d'ergodicité :

$$\begin{aligned} C^{XY}(\theta) &= \langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2) \rangle \\ C^{XY}(\theta) &= \frac{1}{\int\int \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2} \times \cdots \\ &\cdots \int\int X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2) \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Pour calculer la variance, il faut imaginer que l'on prend deux paires de pixels correspondant chacune au même écart angulaire. Mais ces deux paires ne sont pas nécessairement identique. En sautant quelques étapes évidentes, on obtient l'expression suivante de la variance :

$$\begin{aligned} var(C^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\int\int\int\int \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2} - \theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4} \times \cdots \\ &\cdots \int\int\int\int \left(\langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2).X(\vec{n}_3).Y(\vec{n}_4) \rangle - \langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2) \rangle . \langle X(\vec{n}_3).Y(\vec{n}_4) \rangle\right) \cdots \\ &\cdots \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2} - \theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4} - \theta) d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Comme on ne travaille que sur des variables centrées lorsque l'on étudie le CMB, on peut écrire la moyenne du produit ainsi [39] :

$$\begin{aligned}\langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2).X(\vec{n}_3).Y(\vec{n}_4)\rangle &= \langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_2)\rangle.\langle X(\vec{n}_3).Y(\vec{n}_4)\rangle + \langle X(\vec{n}_1).X(\vec{n}_3)\rangle.\langle Y(\vec{n}_2).Y(\vec{n}_4)\rangle + \cdots \\ &\cdots \langle X(\vec{n}_1).Y(\vec{n}_4)\rangle.\langle Y(\vec{n}_2).X(\vec{n}_3)\rangle \end{aligned} \tag{B.10}$$

Ici encore, on reconnaît les différentes fonctions de corrélation (équation A.2). Cependant, si dans l'espace des harmoniques sphériques le multipôle ne changait pas, dans l'espace réel, la variance à un angle θ fixé fait intervenir les fonctions de corrélations à des angles différents :

$$\begin{aligned} var(C^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\int \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2}-\theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4}-\theta)d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4} \times \cdots \\ &\cdots \int (C^{XX}(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_3})C^{YY}(\widehat{\vec{n}_2.\vec{n}_4}) + C^{XY}(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_4})C^{XY}(\widehat{\vec{n}_2\vec{n}_3}))\cdots \\ &\cdots \delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2}-\theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4}-\theta)d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4 \end{aligned} \tag{B.11}$$

l'intégrale portant bien évidemment sur les quatre vecteurs $\vec{n}_i$. La variance cosmique d'une fonction de corrélation étant la moyenne du produit de cette fonctions prise sur un jeu de cartes par la même fonction prise sur un autre jeu de cartes : un mélange des pixels d'une carte avec ceux de l'autre est alors inévitable.

Variance de l'estimateur

Pour calculer la variance de notre estimateur, je me suis référer au calcul effectué par Ganga [39]. Les pixels i et j sont pris sur le jeu de cartes A et les pixels m et n sur le jeu de cartes B et toujours de manière à conserver un écart angulaire fixe θ.

$$\begin{aligned} var(\hat{C}^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\sum_{i,j;m,n} w_i^X.w_j^Y.w_m^X.w_n^Y}\cdots \\ & \sum_{i,j;m,n} w_i^X.w_j^Y.w_m^X.w_n^Y\left(\langle X_i.Y_j.X_m.Y_n\rangle - \langle X_i.Y_j\rangle.\langle X_m.Y_n\rangle\right) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Les variables sont centrées, on utilise donc l'équation B.10 et on reconnaît les différentes fonctions de corrélations (équation A.2) :

$$\begin{aligned} var(\hat{C}^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\sum_{\substack{i,j\\m,n}} w_i^X w_j^Y w_m^X w_n^Y} \times \cdots \\ &\cdots \sum_{\substack{i,j\\m,n}} w_i^X w_j^Y w_m^X w_n^Y (\langle X_i X_m\rangle\langle Y_j Y_n\rangle + \langle X_i Y_n\rangle\langle X_m Y_j\rangle) \end{aligned} \tag{B.13}$$

On peut bien évidemment réécrire cette équation en faisant apparaître explicitement les fonctions de corrélations intervenant et sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} var(C^{XY}(\theta)) &= \frac{1}{\int w^X(\vec{n}_1)w^Y(\vec{n}_2)w^X(\vec{n}_3)w^Y(\vec{n}_4)\delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2}-\theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4}-\theta)d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4} \times \cdots \\ &\cdots \int w^X(\vec{n}_1)w^Y(\vec{n}_2)w^X(\vec{n}_3)w^Y(\vec{n}_4)\Big(C^{XX}(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_3})C^{YY}(\widehat{\vec{n}_2.\vec{n}_4}) + \cdots \\ &\cdots C^{XY}(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_4})C^{XY}(\widehat{\vec{n}_2\vec{n}_3})\Big)\delta(\widehat{\vec{n}_1.\vec{n}_2}-\theta)\delta(\widehat{\vec{n}_3.\vec{n}_4}-\theta)d^2\vec{n}_1 d^2\vec{n}_2 d^2\vec{n}_3 d^2\vec{n}_4 \end{aligned} \tag{B.14}$$

B.3 Lien entre la variance cosmique des fonctions de corrélations et celle des spectres de puissance angulaire

Dans cette annexe, la méthode pour faire le lien entre la variance des fonctions de corrélation à deux points et la variance cosmique des différents spectres de puissance angulaire est présentée. Les fonctions de corrélations sont calculées dans le repère propre la paire de pixel et les résultats sont valables pour une couverture totale du ciel. Pour obtenir ces formules, on part des relations obtenues par Zaldarriaga [26] :

$$\begin{aligned} T(\vec{n}) &= \sum_{\ell m} a^T_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \\ Q(\vec{n}) &= -\left[\sum_{\ell m} a^E_{\ell m} X_{1,\ell m}(\vec{n}) + i a^B_{\ell m} X_{2,\ell m}(\vec{n})\right] \\ U(\vec{n}) &= -\left[\sum_{\ell m} a^B_{\ell m} X_{1,\ell m}(\vec{n}) - i a^E_{\ell m} X_{2,\ell m}(\vec{n})\right] \end{aligned} \tag{B.15}$$

avec les fonction X définies ainsi :

$$X_{1,\ell m}(\vec{n}) = \frac{{}_2Y_{\ell m}(\vec{n}) + {}_{-2}Y_{\ell m}(\vec{n})}{2} \tag{B.16}$$

$$X_{2,\ell m}(\vec{n}) = \frac{{}_2Y_{\ell m}(\vec{n}) - {}_{-2}Y_{\ell m}(\vec{n})}{2} \tag{B.17}$$

Compte-tenu des définitions des spectres de puissance angulaire et des fonctions de corrélations à deux points (voir annexe A.2), on obtient les relations suivantes :

$$\langle T_1 T_2 \rangle = \sum_\ell \left[C_\ell^{TT} \sum_m Y^*_{\ell m}(1) Y_{\ell m}(2)\right] \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned} \langle Q_1 Q_2 \rangle = \sum_\ell \Big[& C_\ell^{EE} \sum_m X^*_{1,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) + C_\ell^{BB} \sum_m X^*_{2,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) - \\ & i C_\ell^{EB}\left(X^*_{1,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) + X^*_{2,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2)\right)\Big] \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned} \langle U_1 U_2 \rangle = \sum_\ell \Big[& C_\ell^{EE} \sum_m X^*_{2,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) + C_\ell^{BB} \sum_m X^*_{1,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) + \\ & i C_\ell^{EB}\left(X^*_{1,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) + X^*_{2,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2)\right)\Big] \end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\langle T_1 Q_2 \rangle = -\sum_\ell \left[C_\ell^{TE} \sum_m Y^*_{\ell m} X_{1,\ell m}(2) + i C_\ell^{TB} \sum_m Y^*_{\ell m} X_{2,\ell m}(2)\right] \tag{B.21}$$

$$\langle T_1 U_2 \rangle = -\sum_\ell \left[C_\ell^{TB} \sum_m Y^*_{\ell m} X_{1,\ell m}(2) - i C_\ell^{TE} \sum_m Y^*_{\ell m} X_{2,\ell m}(2)\right] \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned} \langle Q_1 U_2 \rangle = -\sum_\ell \Big[& C_\ell^{EB} \sum_m \left(X^*_{1,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) - X^*_{2,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2)\right) + \\ & i C_\ell^{BB} \sum_m X^*_{2,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) + i C_\ell^{EE} \sum_m X^*_{1,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2)\Big] \end{aligned} \tag{B.23}$$

Zaldarriaga [26] a alors montré que les sommes sur l'indice m des fonctions Y et X, en se plaçant dans le repère naturel de chaque paire de pixels, sont égales à :

$$\sum_m Y^*_{\ell m}(1) Y_{\ell m}(2) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\theta) \tag{B.24}$$

$$\sum_m X^*_{1,\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) = \frac{2\ell+1}{4\pi} F_{1,\ell 2}(\theta) \tag{B.25}$$

$$\sum_m X^*_{2,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) = -\frac{2\ell+1}{4\pi} F_{2,\ell 2}(\theta) \tag{B.26}$$

$$\sum_m X^*_{1,\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) = 0 \tag{B.27}$$

$$\sum_m Y^*_{\ell m}(1) X_{1,\ell m}(2) = -\frac{2\ell+1}{4\pi} F_{1,\ell 0}(\theta) \tag{B.28}$$

$$\sum_m Y^*_{\ell m}(1) X_{2,\ell m}(2) = 0 \tag{B.29}$$

où θ est l'angle formé entre la direction 1 et la direction 2.

On peut alors obtenir la variance des fonctions de corrélations à deux points en fonction de celle des spectres de puissance angulaire :

$$var\left(\langle T_1 T_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{TT}\right) \tag{B.30}$$

$$var\left(\langle Q_1 Q_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2 \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{EE}\right) + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{BB}\right)\right] \tag{B.31}$$

$$var\left(\langle U_1 U_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2 \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{BB}\right) + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{EE}\right)\right] \tag{B.32}$$

$$var\left(\langle T_1 Q_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2 \left(F_{1,\ell 0}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{TE}\right) \tag{B.33}$$

$$var\left(\langle T_1 U_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2 \left(F_{1,\ell 0}(\theta)\right)^2 var\left(C_\ell^{TB}\right) \tag{B.34}$$

$$var\left(\langle Q_1 U_2\rangle\right) = \sum_\ell \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^2 \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2\right] var\left(C_\ell^{EB}\right) \tag{B.35}$$

Pour une couverture totale du ciel, la variance des spectres de puissance angulaire s'écrivant de la manière suivante $var\left(C_\ell^{XY}\right) = \frac{1}{2\ell+1}\left[\left(C_\ell^{XY}\right)^2 + \left(C_\ell^{XX}\right)\left(C_\ell^{YY}\right)\right]$ et sachant que les spectres de puissance angulaire C_ℓ^{TB} et C_ℓ^{EB} sont nuls, on en déduit l'expression de la variance cosmique pour les six fonctions de corrélations à deux points :

$$var\left(C^{TT}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \left(P_\ell(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{TT}\right)^2 \tag{B.36}$$

$$var\left(C^{QQ}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{EE}\right)^2 + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{BB}\right)^2\right] \tag{B.37}$$

$$var\left(C^{UU}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{BB}\right)^2 + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{EE}\right)^2\right] \tag{B.38}$$

$$var\left(C^{TQ}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{(4\pi)^2} \left(F_{1,\ell 0}(\theta)\right)^2 \left[\left(C_\ell^{TE}\right)^2 + \left(C_\ell^{TT}\right)\left(C_\ell^{EE}\right)\right] \tag{B.39}$$

$$var\left(C^{TU}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{(4\pi)^2} \left(F_{1,\ell 0}(\theta)\right)^2 \left(C_\ell^{TT}\right)\left(C_\ell^{BB}\right) \tag{B.40}$$

$$var\left(C^{QU}(\theta)\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{(4\pi)^2} \left[\left(F_{1,\ell 2}(\theta)\right)^2 + \left(F_{2,\ell 2}(\theta)\right)^2\right] \left(C_\ell^{EE}\right)\left(C_\ell^{BB}\right) \tag{B.41}$$

Trois points importants ressortent de ces calculs :

1. la variance des cross-corrélations $C^{XY}(\theta)$ fait toujours apparaître trois spectres de puissance angulaire C_ℓ^{XX}, C_ℓ^{YY} et C_ℓ^{XY} ;
2. la variance cosmique de $C^{IU}(\theta)$ et $C^{QU}(\theta)$ ne sont pas nulles même si les corrélations le sont ;
3. si la couverture du ciel n'est pas totale, il faut redériver la variance cosmique pour les spectres de puissance angulaire et les introduire dans les équations B.30, B.31, B.32, B.33, B.34 et B.35.

Annexe C

Les simulations de l'émission de la poussière galactique

Dans cette annexe, je détaille la méthode pour simuler des cartes de I, Q et U de l'émission de la poussière galactique à partir d'un champ magnétique galactique $\vec{B}$ donné et de la carte obtenue par Schlegel *et al.*. Les résultats obtenus à l'aide des spectres de puissance angulaire sont aussi présentés.

C.1 Le calcul des paramètres de Stokes

Le but étant d'obtenir des cartes des paramètres de Stokes dans les même conditions qu'une expérience, il est nécessaire de calculer ces paramètres, pour une direction donnée, dans le repère propre à cette direction : c'est à dire le repère définit par $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{n})$ propre au pixel correspondant à la direction que l'on s'est donné.

Pour cela, je me suis inspiré de Kogut et Hinshaw [19]. On va alors supposé que les grains de la poussière galactique sont parfaitement alignés avec le champ magnétique. Mais, ces grains oblates s'alignent de manière à ce que leur grand axe soit perpendiculaire au champ. Comme, leur rayonnement millimétrique se fait principalement suivant leur grand axe, alors la direction du champ éléctrique du rayonnement $\vec{E}_{dust}$ devra être elle aussi perpendiculaire au champ magnétique (figure C.1). De plus, la ligne de visée étant aussi la direction de propagation, ce champ est aussi perpendiculaire à la direction $\vec{n}$ (figure C.1). La direction du vecteur polarisation $\vec{P}_{dust}$ sera donc donnée par le produit vectoriel du champ magnétique et de $\vec{n}$:

$$\frac{\vec{P}_{dust}}{||\ \vec{P}_{dust}\ ||} = \frac{\vec{B}_\wedge \vec{n}}{||\ \vec{B}_\wedge \vec{n}\ ||} \tag{C.1}$$

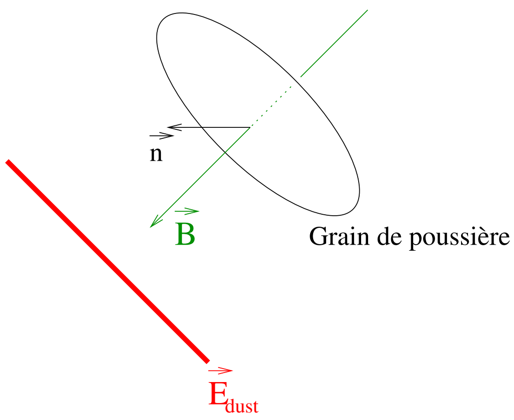


Fig. C.1 – Direction du champ électrique $\vec{E}$ rayonné par un grain de poussière oblate totalement perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$.

Je suis alors Kogut et Hinshaw pour relier les paramètres Q et U à l'intensité I :

$$\begin{aligned} Q(\vec{n}) &= p\cos(2\gamma)I(\vec{n}) \\ U(\vec{n}) &= p\sin(2\gamma)I(\vec{n}) \\ \gamma(\vec{n}) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{Q(\vec{n})}{U(\vec{n})}\right) \end{aligned} \tag{C.2}$$

où p est le degrés de polarisation, qui est toujours inférieur ou égal à 1. Connaissant la direction de la polarisation grâce au champ magnétique, il est facile de déterminer la valeur du rapport $\frac{Q(\vec{n})}{U(\vec{n})}$ en utilisant les définitions des paramètres de Stokes données par l'équation 1.15 :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{B}_{\wedge}\vec{n}}{\| \vec{B}_{\wedge}\vec{n} \|} \\ \frac{Q(\vec{n})}{U(\vec{n})} &= \frac{(\vec{p}.\vec{e}_\theta)^2 - (\vec{p}.\vec{e}_\phi)^2}{2.(\vec{p}.\vec{e}_\theta).(\vec{p}.\vec{e}_\phi)} \end{aligned} \tag{C.3}$$

C.2 Les simulations effectués

J'ai utilisé ce modèle pour simuler des cartes. Le programme, que j'ai codé, fournissait alors les cartes des paramètres de Stokes en prenant les entrées suivantes :

1. la carte en intensité de Schlegel ;
2. les trois composantes, en chaque pixel, du champ magnétique dans le repère cartésien ;
3. la valeur du pourcentage de polarisation en chaque pixel.

Les trois cartes en sortie avait les propriétés suivantes :

1. la carte en intensité est la carte de Schlegel ;
2. les paramètres Q et U sont donnés dans le repère propre à chaque pixel.

Pour obtenir alors des cartes réalistes des paramètres de Stokes, il me suffisait de créer un champ magnétique réaliste, par exemple en extrapôlant les données obtenues par Heiles sur le champ magnétique galactique pour avoir une carte compléte de sa direction.

C.3 Utilisation d'un spectre de puissance

Une autre solution pour simuler des cartes du ciel représentant l'émission de la poussière galactique était de procéder comme pour le CMB :

1. on se donne les quatres spectres de puissance de l'émission de la poussière galactique ;
2. on utilise SYNFAST pour simuler des cartes à partir des spectres.

Cette solution avait aussi l'avantage de créer les cartes de manière aléatoire.

Le modèle que j'ai utilisé, développé par Prunet *et al.*[33], fournit un spectre en ℓ^{-3} pour l'auto-corrélation TT. Les cartes en température ainsi créées étaient alors difficilement utilisables dés que l'on se limitait à une couverture du ciel de type ARCHEOPS. En effet, un spectre en ℓ^{-3} génére de trés grandes zones fortement corrélées (figure C.2). En limitant la couverture du ciel, on perd l'information à grand angle (c'est à dire bas ℓ), précisément là où les corrélations sont prédominantes dans ce modèles.

On peut voir sur la figure C.3 à gauche qu'il y a un trés bon accord entre la prédiction théorique et le calcul par notre estimateur pour une couverture totale du ciel. Cependant à droite, il est évident qui il y a une grande différence dés qu'on limite la couverture du ciel. Ceci illustre la difficulté à mettre en oeuvre des simulations réalistes de l'émission de la poussière galactique et d'en déduire les fonctions de corrélations. Cet écart semble venir du choix d'un spectre en ℓ^{-3}, un tel spectre n'étant valable que pour des valeurs élevées du multipôle ℓ, typiquement supérieure à $\ell = 30$.

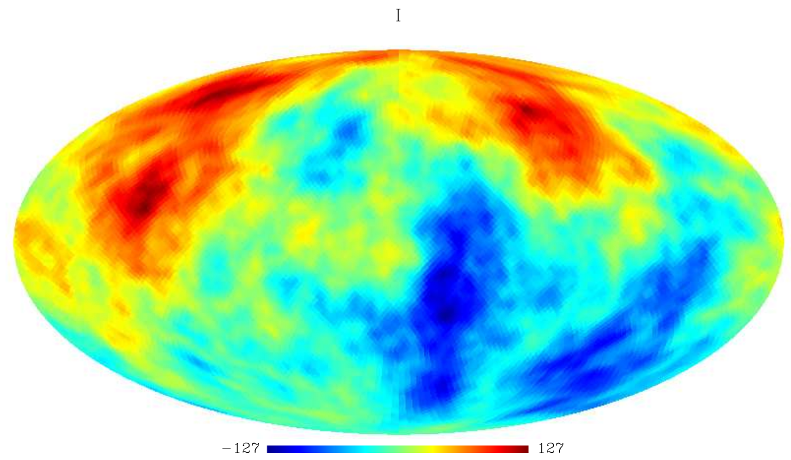


FIG. C.2 – Carte en intensité de l'émission de la poussière galactique en pour un spectre de puissance angulaire de la corrélation TT en ℓ^{-3} ; les corrélations sont prédominantes à trés grand angle.

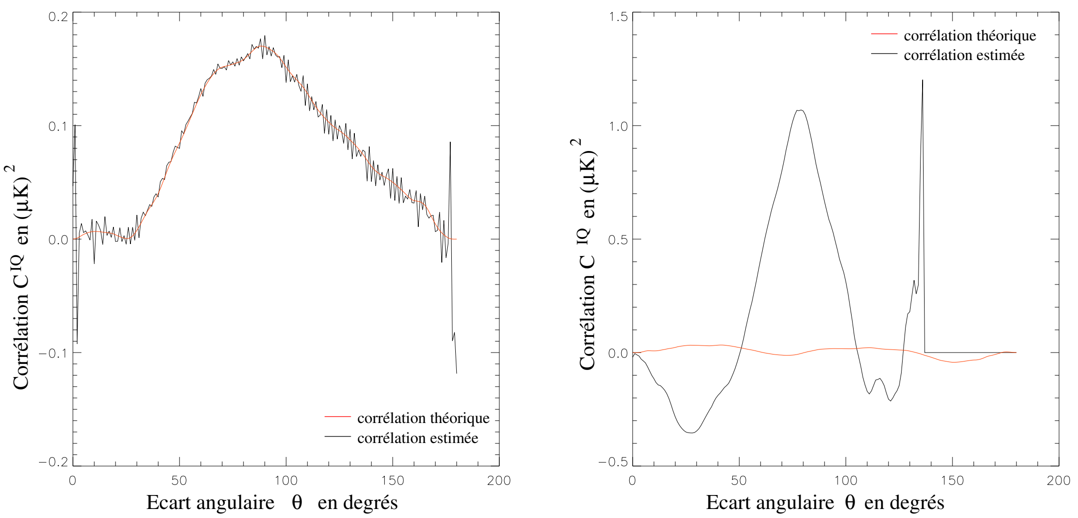


FIG. C.3 – *Gauche :* Corrélation IQ théorique (rouge) et estimée (noir) obtenue à partir des spectres angulaire de la poussière galactique pour une couverture de ciel totale. *Droite :* même résultat avec une couverture de type ARCHEOPS, la perte d'informations à grand angle est trés importante et l'estimation s'éloigne considérablement de la prédiction théorique.

Résumé

L'expérience ballon ARCHEOPS, qui avait pour but de mesurer les anisotropies en température du CMB, a pu aussi mesurer, grâce à une série de six bolomètres polarisées à 353 GHz, l'émission polarisée de la poussière galactique. Une bonne compréhension de ce rayonnement est indispensable à l'étude des anisotropies en polarisation du CMB.

Ce rapport propose tout d'abord une introduction à la polarisation du CMB. Le calcul des fonctions de corrélation appliquées aux données CMB ainsi que différents tests de ces fonctions sont présentés dans une deuxième partie. Finalement, la contamination du CMB par l'émission polarisée de la poussière galactique est contrainte en utilisant les données d'ARCHEOPS et les fonctions de corrélation.

Mots-clés : cosmologie observationnelle—CMB : polarisation—poussière galactique : émission polarisée.

Abstract

The ARCHEOPS balloon-borne experiment was designed to measure CMB temperature anisotropies. In addition, ARCHEOPS measures the galactic dust polarised radiation using six polarised bolometers at 353 GHz. To study the CMB polarised anisotropies we need to have a good understanding of the dust emission.

In this report, we first provide an introduction to the theory of CMB polarization. Secondly we describe the calculation, implementation and test of correlation functions applied to CMB data. Finally, we derive, using the ARCHEOPS data and the correlation function, the contamination to CMB emission from galactic polarised dust.

keywords : observationnal cosmology—CMB : polarization—galactic dust : polarized radiation.