

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS VI

présentée par

Guillaume PATANCHON

**Analyse multi-composantes d'observations du
fond diffus cosmologique.**

sous la direction de

Jacques DELABROUILLE et Jean-François CARDOSO

devant le jury d'examen composé de

M. Albert BIJAOU

M. Jacques DELABROUILLE

Pr. Pierre ENCRENAZ (président du jury)

M. Pierre LUTZ

M. Jean-Loup PUGET (rapporteur)

M. Daniel SANTOS (rapporteur)

M. Daniel VIGNAUD (invité)

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement Jacques Delabrouille pour m'avoir encadré durant cette thèse. J'ai particulièrement apprécié sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme. Ses compétences m'ont été extrêmement profitables.

Je remercie vivement Jean-François Cardoso de m'avoir fait bénéficier de ses compétences en séparation de sources. Sa contribution a été essentielle pour la réalisation de ce projet.

Un grand merci à Jean-Loup Puget et Daniel Santos d'avoir endossé le rôle de rapporteur de ma thèse. Merci également à Albert Bijaoui, Pierre Encrenaz et Pierre Lutz d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie Daniel Vigaud de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de physique corpusculaire et cosmologie du Collège de France.

Je souhaite remercier avec un soin particulier Yannick Giraud-Héraud pour sa disponibilité, ses conseils précieux et son sens de l'humour. Merci à Alain Bouquet, qui a partagé mon bureau pendant cette fin de thèse. J'exprime toute ma reconnaissance à Jim Bartlett et Jean Kaplan pour leurs remarques avisées et leur spontanéité. Je remercie l'ensemble des post-doctorants, thésards et stagiaires qui ont appartenu au groupe de cosmologie observationnelle durant ces trois dernières années pour l'ambiance formidable qu'ils ont su créer.

Je tiens à remercier Hichem Snoussi, ainsi que Juan Francisco Macías Pérez et Patricio Vielva pour les nombreux échanges que nous avons entretenus au cours de notre collaboration. Ils m'ont été extrêmement précieux. Je remercie les membres du groupe de cosmologie du laboratoire Cavendish à Cambridge et en particulier Mark Ashdown pour leur accueil durant trois mois de ma thèse. Un grand merci à Silvia Fernández Cerezo ainsi qu'au groupe de cosmologie de l' "Instituto de astrofísica de canarias" pour la collaboration que nous avons entretenu.

Je remercie l'ensemble des membres de la collaboration Archeops et en particulier Alain Benoît et François Xavier Désert de m'avoir accepté parmi eux.

Enfin, merci à mes parents Jean-Pierre et Yvette, à mes frères Fabien et Laurent et à ma marraine Josette pour leur soutien particulièrement apprécié en cette fin de thèse.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	1
1. <i>Cadre théorique du fond diffus cosmologique</i>	5
1.1 Les modèles cosmologiques	6
1.1.1 Le principe cosmologique	6
1.1.2 La relativité	7
1.1.3 La métrique de Robertson-Walker	8
1.1.4 Quelques propriétés de l'Univers homogène et isotrope	8
1.1.5 Les équations de Friedmann	10
1.1.6 Les modèles de Friedmann	10
1.2 L'histoire de l'Univers	13
1.2.1 Le Big-Bang	14
1.2.2 L'égalité matière-radiation	14
1.2.3 L'histoire thermique de l'Univers	15
1.2.4 L'inflation	19
1.3 Les fluctuations dans l'Univers	24
1.3.1 Quelques grandeurs statistiques	24
1.3.2 Les perturbations cosmologiques	25
1.3.3 La matière dans l'Univers	26
1.3.4 Evolution des perturbations	27
1.4 Les anisotropies du fond diffus cosmologique	31

1.4.1	Le spectre spatial de puissance du CMB	32
1.4.2	L’empreinte des fluctuations sur le fond diffus cosmologique	34
1.4.3	Influence des paramètres cosmologiques	36
1.4.4	Mesures actuelles	41
2.	<i>Les émissions d’avant plan</i>	45
2.1	Les émissions galactiques	47
2.1.1	Quelques grandeurs utiles	47
2.1.2	La poussière interstellaire	47
2.1.3	L’émission synchrotron	52
2.1.4	L’émission Bremsstrahlung	56
2.2	Les composantes extragalactiques	58
2.2.1	Les sources extragalactiques	58
2.2.2	L’effet Sunyaev-Zel’dovich	59
3.	<i>Modélisation d’observations du CMB</i>	65
3.1	La mission Planck	66
3.1.1	Les objectifs scientifiques	66
3.1.2	La stratégie d’observation	68
3.1.3	Les instruments de Planck	69
3.2	Modèle des observations dans le domaine millimétrique	70
3.2.1	Modèle simple des émissions astrophysiques	71
3.2.2	Modèle des observations	73
3.2.3	Les cartes d’observations	78
4.	<i>Les méthodes de séparation de composantes</i>	81
4.1	Les méthodes “classiques” de séparation de composantes	82
4.1.1	L’approche Bayésienne	83

4.1.2	Le maximum de vraisemblance	83
4.1.3	L'ajout d' <i>a priori</i> sur les composantes	84
4.1.4	Les méthodes d'inversion dérivées de la méthode de Wiener	88
4.2	Les méthodes de séparation de composantes en aveugle	90
4.2.1	L'analyse en composantes indépendantes	90
4.2.2	Les méthodes utilisées au sein de la communauté "CMB"	92
5.	<i>Séparation de composantes et effets systématiques</i>	93
5.1	Modélisation des effets systématiques	94
5.1.1	Modèle simple dans les données ordonnées en temps	94
5.1.2	Un modèle pour les cartes d'observations	95
5.2	Simulations de petites cartes d'observations de Planck HFI	97
5.2.1	Simulation des composantes astrophysiques	97
5.2.2	Simulation des séries temporelles de mesure	101
5.2.3	Les cartes simulées	104
5.3	Généralisation des méthodes de séparation de composantes - application aux données simulées.	106
5.3.1	Implantation et application de la méthode de Wiener généralisée sur les simulations d'observations de Planck HFI	106
5.3.2	Résultats	109
6.	<i>L'estimation spectrale multi-détecteurs multi-composantes</i>	113
6.1	Introduction	114
6.2	Ajustement spectral multi-détecteurs multi-composantes	116
6.2.1	Statistiques spectrales	116
6.2.2	La méthode	117
6.2.3	La méthode de maximisation	122
6.2.4	Prédiction des erreurs et de la qualité de l'ajustement	126

6.2.5	Les applications de la méthode MDMC	129
6.3	Tests et performances	130
6.3.1	Application sur des petites cartes carrées simulées	131
6.3.2	Application sur des simulations d'observation de l'ensemble du ciel par Planck	139
7.	<i>Application aux données de la mission Archeops</i>	151
7.1	Présentation de l'expérience	152
7.1.1	La stratégie d'observation	153
7.1.2	L'instrument	154
7.1.3	Premiers résultats d'Archeops - spectre de puissance	157
7.2	Prétraitement des données et fabrication des cartes pour l'ajustement spectral MDMC	159
7.2.1	Les signaux parasites	159
7.2.2	Le prétraitement des données	161
7.2.3	La fabrication des cartes	163
7.3	La méthode d'ajustement spectral appliquée à Archeops	167
7.3.1	La préparation des données pour l'ajustement spectral	168
7.3.2	L'application	169
7.3.3	Les principaux résultats	171
7.3.4	Contraintes apportées par la mesure de la matrice de mélange	181
7.3.5	Le spectre de puissance du CMB	183
	<i>Conclusion</i>	194
	<i>Annexe</i>	199
A.	<i>L'algorithme EM et la vraisemblance</i>	201

<i>B. La divergence de Kullback entre deux matrices</i>	203
---	-----

TABLE DES FIGURES

1.1 Répartition des galaxies à grande échelle	6
1.2 L'histoire thermique de l'Univers	16
1.3 Spectre électromagnétique du CMB	17
1.4 Prédiction des abondances des éléments	18
1.5 L'évolution du rayon de Hubble	23
1.6 Evolution des perturbations de densité	30
1.7 Carte du CMB observée par COBE-DMR	31
1.8 Modèle de spectre de puissance des anisotropies du CMB	37
1.9 Géométrie dans un Univers courbe	38
1.10 Contraintes sur H_0 et Ω_T	39
1.11 Evolution du spectre de puissance en fonction des paramètres cosmologiques	40
1.12 Mesures récentes du spectre de puissance du CMB I	42
1.13 Mesures récentes du spectre de puissance du CMB II	44
2.1 Spectres électromagnétiques des composantes aux fréquences du CMB	46
2.2 Carte de poussière observée par IRAS	48
2.3 Spectre de puissance spatial de l'émission de la poussière	50
2.4 L'émission des grains de poussière en rotation	52
2.5 Carte d'émission synchrotron à 408 MHz	53
2.6 Carte d'émission synchrotron par WMAP	55
2.7 Carte d'émission H_α	57

2.8	Spectre électromagnétique de l'effet SZ thermique	61
2.9	Carte simulée d'effet Sunyaev-Zel'dovich thermique	62
2.10	Carte simulée d'effet Sunyaev-Zel'dovich cinétique	63
3.1	Le satellite Planck	67
3.2	La stratégie d'observation de Planck	69
3.3	Le plan focal de Planck	70
3.4	Cartes de CMB observées à des résolutions angulaires différentes . . .	75
3.5	Spectre caractéristique de bruit	77
5.1	Le balayage du ciel par Planck	96
5.2	Fonction de corrélation du CMB	99
5.3	Petite carte de CMB simulée	100
5.4	Petite carte de d'émission de la poussière simulée.	102
5.5	Balayage du ciel	103
5.6	Simulations d'observations de Planck HFI.	105
5.7	Conséquence des différences dans la direction de pointage des détecteurs	106
5.8	Résultats de la séparation de composantes.	111
5.9	Le filtre effectif de Wiener.	112
6.1	Simulations d'observations pour l'estimation spectrale MDMC.	132
6.2	Contraintes sur les lois d'émission des composantes	134
6.3	Distribution des paramètres de mélange relatifs au CMB.	135
6.4	Distribution des paramètres de mélange relatifs à la poussière.	136
6.5	Distribution des paramètres de mélange relatifs à l'effet SZ.	136
6.6	Les spectres de puissance des composantes estimés	137
6.7	Comparaison des estimations des erreurs commises sur les spectres de puissance.	138
6.8	Les spectres de puissances du bruit estimés	138

6.9	La séparation de Wiener “en aveugle”	140
6.10	Cartes simulées d’observation de l’ensemble du ciel par Planck.	142
6.11	Cartes simulées de composantes sur la totalité du ciel.	143
6.12	Les spectres de puissance des composantes estimés sur la totalité du ciel en aveugle.	146
6.13	Les spectres de puissance des composantes estimés sur la totalité du ciel	148
6.14	Cartes des composantes sur la totalité du ciel reconstruites en aveugle.	149
7.1	La ballon Archeops	152
7.2	Le couverture du ciel par Archeops	153
7.3	Dessin technique de la nacelle d’Archeops	154
7.4	Configuration optique d’un détecteur	155
7.5	Position des détecteurs d’Archeops dans le plan focal	157
7.6	Carte du ciel observé par Archeops.	158
7.7	Spectre de puissance du CMB déterminé après l’analyse de la collaboration Archeops	158
7.8	Spectre de l’atmosphère	160
7.9	Influence des dérives basses fréquences dans les séries temporelles sur le spectre de puissance	164
7.10	Effet du filtrage sur le spectre de puissance des anisotropies du CMB	165
7.11	Cartes d’observation par les bolomètres d’Archeops obtenues par la méthode MIRAGE après un filtrage des données.	166
7.12	La carte de couverture d’Archeops	167
7.13	Les pseudo-spectres de puissance des composantes estimés dans les cartes d’observation d’Archeops	172
7.14	Les cartes de composantes astrophysiques mesurées dans les cartes d’observation d’Archeops	174
7.15	Les cartes de composante résiduelles mesurées dans les cartes d’observation d’Archeops	175
7.16	Fonction de transfert des anisotropies du CMB dans la carte séparée.	176

7.17	Cartes des anisotropies du CMB avec Archeops dans une zone redondante.	177
7.18	Comparaison entre MAXIMA et Archeops.	177
7.19	Comparaison entre la carte d'anisotropies séparée dans Archeops et la carte WMAP.	179
7.20	Mesures de la loi d'émission des anisotropies du CMB	182
7.21	Contraintes sur la loi d'émission de la poussière	184
7.22	Variance d'échantillonnage sur la mesure du spectre de puissance avec Archeops	187
7.23	Le spectre puissance du CMB estimé à partir des données non-décorrélées de l'ozone	188
7.24	Le spectre puissance du CMB estimé à partir des données décorrélées de l'ozone	189
7.25	Comparaison des spectres de puissance	190
7.26	La qualité de l'ajustement des paramètres sur les données non-décorrélées de l'ozone	192
7.27	La qualité de l'ajustement des paramètres sur les données décorrélées de l'ozone	193

INTRODUCTION

Le rayonnement de fond cosmologique, ou CMB (acronyme anglais de “Cosmic Microwave Background”), que nous mesurons aujourd’hui sur tout le ciel à la température très uniforme de 2,726 kelvins, a été observé pour la première fois par Penzias et Wilson en 1965. Gamow en 1949 avait prédit l’existence d’un tel rayonnement dans le cadre de la théorie du *Big-Bang*. Si l’on remonte dans le passé, à des temps inférieurs à 300000 ans après le *Big-Bang*, l’Univers était suffisamment chaud pour maintenir la matière à l’état de plasma entre électrons, photons et noyaux. L’expansion de l’Univers entraînant son refroidissement, lorsque la température de l’Univers devint inférieure à 3000 Kelvins, les électrons et les noyaux se combinèrent et la longueur d’interaction des photons devint supérieure à la taille de l’horizon actuel. Le CMB constitue ce rayonnement fossile.

L’expérience COBE/DMR en 1992 a montré l’existence de petites anisotropies de température au niveau de $\Delta T/T = 10^{-5}$. Ces anisotropies sont la conséquence directe des petites inhomogénéités de densité et de vitesse de la matière au moment du découplage, dues aux fluctuations primordiales introduites au moment de l’inflation. Ces fluctuations ont donné lieu à toutes les structures que nous observons aujourd’hui telles les galaxies. Les caractéristiques des anisotropies du CMB dépendent d’un certain nombre de paramètres fondamentaux comme par exemple la densité totale d’énergie dans l’Univers, ou encore la densité de matière baryonique. Ces paramètres sont appelés paramètres cosmologiques. D’après les modèles d’inflation, toute l’information sur les paramètres cosmologiques que l’on peut extraire des anisotropies de température du CMB est contenue dans son spectre spatial de puissance.

Durant ces quatre dernières années, de nombreuses expériences dédiées à la mesure du spectre de puissance du CMB ont vu le jour. L’ensemble de ces expériences a permis d’apporter des contraintes importantes sur les paramètres cosmologiques et en particulier de montrer que l’Univers est spatialement plat. En 2007 sera lancé le satellite Planck. Grâce à la grande sensibilité et la bonne résolution angulaire de ses instruments, la précision de mesure du spectre de puissance des anisotropies du CMB sera telle qu’une grande partie des paramètres cosmologiques sera mesurée avec une précision meilleure que le pour cent. La précision de mesure du spectre de puissance avec Planck dépendra de notre capacité à soustraire les émissions parasites venant perturber les observations. Un des obstacles majeurs pour atteindre une bonne précision est la présence d’émissions astrophysiques aux longueurs d’ondes d’observations des instruments. Nous observons en réalité une superposition de composantes, qui sont par exemple, avec le CMB, les émissions thermiques de la poussière galactique ou encore les émissions Sunyaev-Zel’dovich qui proviennent de l’interaction des photons du fond diffus cosmologique avec les électrons chauds présents au coeur des amas de galaxies. De plus, certains effets instrumentaux corrélés seront présents dans les observations de Planck. Au premier ordre, nous pouvons considérer que ces effets sont vus au même instant par tous les détecteurs. Ils forment ainsi des composantes dans les séries temporelles de mesures. Comme les détecteurs de Planck pointent dans des directions du

ciel différentes à un instant donné, ces composantes systématiques sont “décalées” d’une carte d’observation à une autre après reprojexion des données. Les méthodes “classiques” de séparation de composantes développées au sein de la communauté permettent la soustraction des composantes astrophysiques, mais sont inadaptées pour traiter les composantes systématiques. Nous verrons comment dans certains cas ces méthodes peuvent être généralisées au traitement des effets systématiques.

Par ailleurs, les méthodes “classiques” de séparation de composantes et de mesure du spectre de puissance du CMB possèdent deux défauts. Le premier est qu’elles nécessitent la connaissance *a priori* des spectres électromagnétiques des composantes. Or, pour la plupart des composantes, ils ne sont pas connus avec une précision suffisante. Ensuite, le spectre de puissance du CMB est habituellement estimé à partir d’une carte de CMB obtenue après séparation des composantes, mais l’estimation du spectre de puissance et la production de cartes de composantes sont deux objectifs qui nécessitent des approches différentes. Nous présentons une nouvelle méthode d’estimation du spectre de puissance du CMB directement à partir des cartes d’observations. Cette méthode réalise la séparation des composantes ; son produit final n’est pas les cartes de composantes, mais leurs spectres de puissances. Elle fonctionne en aveugle, signifiant qu’aucun *a priori* sur les lois d’émission des composantes n’est nécessaire. Elle nous permet ainsi d’apporter des informations sur les composantes.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : dans le premier chapitre, nous présentons quelques aspects théoriques du modèle standard de la cosmologie. Nous portons une attention particulière sur les anisotropies du CMB et sur leur spectre de puissance. Dans le second chapitre nous introduirons les différentes composantes astrophysiques d’avant-plan présentes dans le domaine de longueur d’ondes millimétrique. Dans le troisième chapitre, nous décrirons le modèle des observations pour la séparation des composantes. Nous décrirons ensuite les méthodes de séparation de composantes utilisées au sein de la communauté CMB. Dans le cinquième chapitre, sera présentée une méthode de séparation de composantes généralisée au traitement de certains effets systématiques. Nous traiterons de son application sur des simulations d’observation de l’instrument haute fréquence de Planck.

Le sixième chapitre présente la méthode d’estimation spectrale multi-composantes en aveugle. Ses performances seront évaluées grâce à son application sur des simulations d’observations de Planck. Enfin le septième chapitre est consacré à l’application de la méthode sur les données de la mission ballon Archeops. Nous étudierons quelles sont les contraintes apportées par la méthode sur le spectre de puissance du CMB et aussi sur l’émission de la poussière galactique.

1. CADRE THÉORIQUE DU FOND DIFFUS COSMOLOGIQUE

1.1 Les modèles cosmologiques

1.1.1 Le principe cosmologique

Le principe cosmologique est le simple fait qu'à grande échelle, supérieure aux grandes structures de la distribution de galaxies, l'Univers est homogène et isotrope. L'homogénéité est la propriété d'être identique quelque soit la position dans l'espace, et l'isotropie est l'absence de direction privilégiée. Bien que le principe cosmologique ait été historiquement introduit sans aucune justification observationnelle, mais simplement philosophiques, il existe de nos jours plusieurs preuves en sa faveur. Tout d'abord, le sondage des galaxies jusqu'à des échelles de l'ordre de 1 Gpc permettent de mettre en évidence une homogénéité croissante de la distribution de matière avec l'échelle considérée. A des échelles inférieures à 100 Mpc, les galaxies se regroupent pour former des amas ainsi que des structures filamentaires. La figure 1.1 montre la répartition de quelques centaines de milliers de galaxies mesurée par le 2dF ("2 degrees Field"). Un autre argument fort en faveur du principe cosmologique est la grande

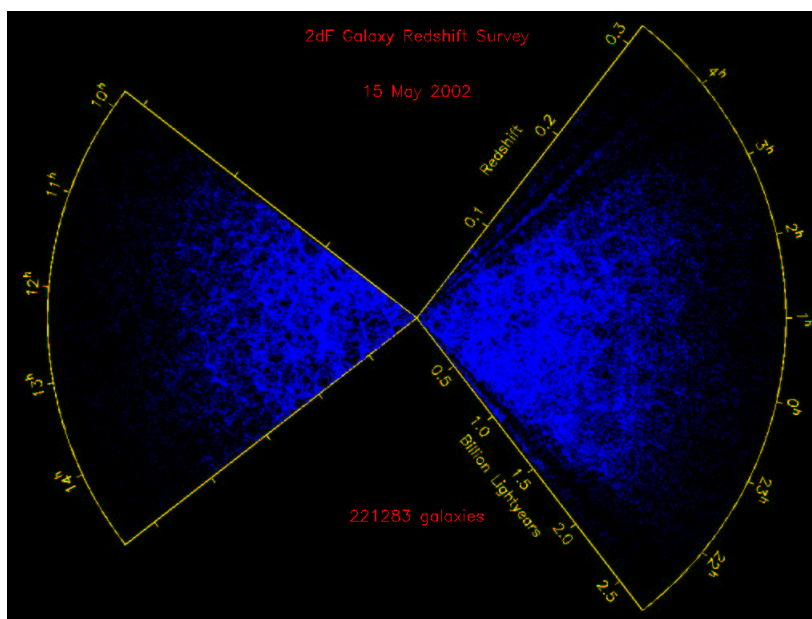


Fig. 1.1: Répartition de 221283 galaxies en fonction de la distance radiale couvrant une région d'environ 2000 degrés carrés autour des pôles nord et sud galactiques. A grand échelle, la répartition des galaxies semble être homogène et isotrope.

uniformité de la température du CMB (2.73 Kelvins), car il s'agit d'une émission qui s'est produite à des distances de quelques milliard de parsecs. Les fluctuations de température du CMB sont seulement de l'ordre de 10^{-5} Kelvin et semblent être isotropes.

Le modèle standard de la cosmologie qui sera évoqué dans cette thèse repose sur le principe cosmologique. La théorie de la relativité générale d'Einstein est utilisée dans ce modèle, la gravitation jouant un rôle essentiel dans l'évolution de l'Univers. La relativité d'Einstein est introduite dans la section suivante.

1.1.2 La relativité

La relativité restreinte, proposée par Einstein en 1905, repose sur les postulats suivants :

- Dans le vide, la lumière se propage à une vitesse constante (c) dans tous les référentiels inertiels, qui forment une classe de référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres.
- Aucune expérience de physique ne peut mettre en évidence le mouvement d'un référentiel galiléen par rapport à un autre référentiel galiléen.

La conséquence immédiate de la relativité restreinte est que le temps est une grandeur relative. Les quatre dimensions de l'espace-temps doivent être traitées de manière indissociée. On peut définir l'intervalle entre deux événements invariant par changement de coordonnées (espace+temps) par :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.1)$$

La trajectoire d'un photon est donnée par $ds = 0$.

La relativité générale apporte une solution au problème des référentiels accélérés et inclut la gravitation. Elle repose sur le principe d'équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle (Einstein 1917). Ainsi la gravitation devient une propriété de l'espace-temps qui n'est plus nécessairement euclidien. La présence locale de masse ou (même) d'énergie induit une courbure locale de l'espace-temps. L'intervalle entre deux événements prend la forme :

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j \quad (1.2)$$

où g_{ij} est le tenseur métrique. Les indices répétés signifient sommation sur ces indices et i, j varient de 0 à 3, $x^0 = ct$ est la coordonnée de temps et x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées d'espace.

Les équations d'Einstein permettent d'établir une relation entre l'énergie-matière et la métrique. En supposant que le tenseur énergie-impulsion T_{ij} ne contienne que des dérivées premières et secondes de g_{ij} , que la dérivée covariante soit nulle et qu'à la limite classique on retrouve l'équation de Poisson : $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, la forme la plus générale des équations d'Einstein est :

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} \quad (1.3)$$

R_{ik} est le tenseur de Ricci construit à partir des dérivées secondes de g_{ij} . Λ est une constante appelée constante cosmologique.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution d'un Univers homogène et isotrope dans le cadre de la relativité générale.

1.1.3 La métrique de Robertson-Walker

Comme on l'a vu dans la section précédente, les propriétés géométriques de l'espace-temps sont décrites par la métrique. La forme la plus générale de la métrique de l'Univers qui respecte le principe cosmologique est la métrique de Robertson-Walker. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$ds^2 = (c dt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.4)$$

en utilisant les coordonnées sphériques comobiles : r , θ et ϕ (r est sans dimension). t est le temps propre, $a(t)$ est un terme de dilatation de l'espace qui dépend du temps, il est habituellement appelé paramètre d'échelle. K est le paramètre de courbure de l'espace. Il n'y a pas de termes croisés $dt dx^i$ (x^i est une coordonnée spatiale) dans la métrique de Robertson-Walker car t peut être défini comme un temps universel tel que à chaque instant la partie spatiale tridimensionnelle de la métrique est identique en chaque point. L'isotropie de l'espace implique la symétrie sphérique de la métrique. Dans le cas où $K = 0$, la géométrie de l'Univers est euclidienne, on dit que l'Univers est plat. Si $K > 0$, la courbure de l'espace est positive, l'Univers est dit fermé et a un volume fini sans bords. La somme des angles d'un triangle tracé dans l'espace est supérieure à 180° . A deux dimensions, un espace à courbure positive constante est la surface d'une sphère. Enfin, si $K < 0$, la courbure de l'espace est négative, l'Univers est dit ouvert et la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° . Dans le cas d'un Univers courbe, nous allons fixer notre système de coordonnées de telle sorte que les valeurs permises de K soient 1 ou -1. Ainsi, le paramètre d'échelle a possède la dimension d'une longueur. Pour $K = 0$, aucun choix de coordonnées n'est nécessaire, par exemple le paramètre d'échelle de nos jours peut être fixé à 1.

1.1.4 Quelques propriétés de l'Univers homogène et isotrope

La loi de Hubble

En mesurant leur décalage vers le rouge, Hubble en 1929 observa l'éloignement des galaxies par rapport à nous (et par conséquent les unes par rapport aux autres) avec une vitesse proportionnelle à leur distance (Hubble, 1929). Cette propriété de l'Univers résultant du principe cosmologique peut être mise en évidence simplement à l'aide de

la métrique de Robertson Walker.

La distance propre d'un point P par rapport à l'origine P_0 de notre système de coordonnées est la distance mesurée par une chaîne de règles connectées au temps t entre P et P_0 . On obtient à partir de l'expression de la métrique, en prenant $dt = 0$:

$$d_p = \int_0^r \frac{a(t)dr'}{(1 - Kr'^2)^{1/2}} = a(t)f(r) \quad (1.5)$$

où la fonction $f(r)$ est :

$$f(r) = \begin{cases} \arcsin(r) & \text{si } K = 1 \\ r & \text{si } K = 0 \\ \operatorname{arcsinh}(r) & \text{si } K = -1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Ainsi la distance propre entre deux points de l'Univers dépend du temps via le paramètre de dilatation $a(t)$. La vitesse d'éloignement des deux points P et P_0 est :

$$v_r = \dot{a}f(r) = \frac{\dot{a}}{a}d_p \quad (1.7)$$

L'équation précédente est la loi de Hubble. On définit le paramètre de Hubble mesurant la vitesse d'expansion comme suit :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.8)$$

On estime le paramètre de Hubble au temps présent à $H_0 = 65 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ à 20 pour cent près. Il est utile de définir la constante de Hubble sans dimensions : $h = H_0/(100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1})$.

Le décalage spectral

Le décalage spectral ou "redshift", signifiant "décalage vers le rouge", que l'on note z , est défini comme le taux d'accroissement de la longueur d'onde d'un rayon lumineux entre son point d'émission et l'observateur.

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.9)$$

où λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement observée (au temps t_0 , c'est à dire aujourd'hui) et λ_e la longueur d'onde du rayonnement au moment de son émission (au temps t_e). Sachant que $ds^2 = 0$ pour un photon, en intégrant les parties spatiales et temporelles de la métrique de Robertson Walker entre les coordonnées de l'émission et de la réception de l'onde lumineuse, on trouve rapidement la relation suivante :

$$\frac{a}{\lambda_e} = \frac{a_0}{\lambda_0} \quad (1.10)$$

avec $a = a(t_e)$ et $a_0 = a(t_0)$. On obtient ainsi la relation pour le redshift :

$$1 + z = \frac{a_0}{a} \quad (1.11)$$

Le redshift d'un objet est d'une grande utilité pratique en astrophysique car il peut être mesuré directement par spectroscopie. Il est fréquemment utilisé afin d'évaluer la distance d'un astre, ou de situer un évènement dans l'histoire de l'Univers.

1.1.5 Les équations de Friedmann

Ayant établi la métrique de l'Univers homogène et isotrope (voir 1.1.3), les équations d'Einstein (1.3) permettent d'obtenir les relations d'évolution de l'Univers en fonction de son contenu matériel. Plus précisément, elles permettent de relier l'évolution du paramètre d'échelle $a(t)$ avec la densité et la pression des différentes composantes matérielles de l'Univers. Ces relations sont les équations de Friedmann.

Il est d'abord nécessaire d'écrire le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait :

$$T_{ij} = (p + \rho c^2)U_i U_j - p g_{ij} \quad (1.12)$$

où p et ρc^2 sont la pression et la densité d'énergie du fluide ; U_k est sa quadri-vitesse. Les équations de Friedmann sont alors :

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a + \frac{\Lambda c^2 a}{3} \quad (1.13)$$

et

$$\dot{a}^2 + K c^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} \quad (1.14)$$

Il est possible d'interpréter les équations de Friedmann en l'absence de constante cosmologique ($\Lambda = 0$) dans une théorie newtonienne de la gravitation. La première équation (1.13) peut être retrouvée sans le terme de pression qui est un terme relativiste, en considérant l'évolution d'une particule massive à l'intérieur d'une sphère de densité constante. La deuxième équation (1.14) n'est ni plus ni moins que l'expression de la conservation de l'énergie par unité de masse et la valeur de K donne le signe de l'énergie totale du système. Toutefois, il convient de préciser que ces interprétations restent assez critiquables car elles font appel à une théorie physique dans des conditions hors de son champ de validité.

1.1.6 Les modèles de Friedmann

La résolution des équations de Friedmann permet d'obtenir les modèles standards de la cosmologie qui décrivent l'évolution du paramètre d'échelle au cours du temps.

Pour cela il est nécessaire d'établir une relation entre la densité et la pression du (ou des) fluide(s) constituant l'Univers. Dans la plupart des cas ayant un intérêt physique, l'équation d'état d'un fluide prend la forme :

$$p = w\rho c^2 \quad (1.15)$$

où w est une constante entre 0 et 1 pour la matière ordinaire (baryons, photons, matière noire, ...). La vitesse du son dans un tel fluide est :

$$v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \sqrt{w} c \quad (1.16)$$

ainsi, $w > 1$ n'a pas de sens physique car cela impliquerait $v_s > c$, aussi, $w < 0$ impliquerait une vitesse imaginaire.

Nous verrons par la suite que l'Univers est passé par essentiellement deux phases au cours de son histoire (après l'inflation) :

- La phase radiative : Il s'agit d'une phase de domination du rayonnement, ou des particules ultrarelativistes en équilibre thermique. Dans ce cas, $w = 1/3$, et la vitesse du son est $v_s = c/\sqrt{3}$

-La phase de domination de la matière : l'énergie cinétique des particules est négligeable devant leur énergie de masse et dans ce cas $w = 0$

Une combinaison des équations 1.13 et 1.14 permet d'obtenir la relation suivante :

$$d(\rho a^3) = -3 \frac{p}{c^2} a^2 da \quad (1.17)$$

cette équation exprime la conservation de l'énergie pendant l'expansion adiabatique de l'Univers. L'équation d'état permet d'obtenir une relation entre la densité d'énergie et le paramètre d'échelle :

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{const.} = \rho_0 a_0^{3(1+w)} \quad (1.18)$$

Ainsi, durant la phase de domination de la poussière, ρ varie naturellement comme a^{-3} , et durant la phase radiative, ρ est proportionnel a^{-4} . Ce dernier résultat provient du fait que l'énergie d'un photon est inversement proportionnelle à a (voir équation 1.10), le nombre de photons par unité de volume variant naturellement comme a^{-3} .

Réécrivons l'équation 1.14 en la divisant par le paramètre a^2 afin d'obtenir l'évolution du paramètre de Hubble :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{K c^2}{a^2} \quad (1.19)$$

On définit la densité critique :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.20)$$

ainsi que les quantités :

$$\begin{cases} \Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \\ \Omega_k = \frac{Kc^2}{a^2 H^2} \end{cases} \quad (1.21)$$

On obtient finalement à partir de 1.19 la relation :

$$\Omega_k = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1 \quad (1.22)$$

Définissons pour la suite le paramètre de densité totale d'énergie :

$$\Omega_T = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (1.23)$$

D'après l'équation 1.22, la mesure du paramètre de densité totale d'énergie donne la courbure de l'Univers. Pour $\Omega_T > 1$ alors $K = 1$, pour $\Omega_T = 1$, $K = 0$ et pour $\Omega_T < 1$, $K = -1$.

Quelques solutions des équations de Friedmann

Il est intéressant de résoudre les équations de Friedmann pour des valeurs particulières des paramètres cosmologiques :

- **Modèle "Einstein-de Sitter" : Univers plat $\Omega_k = 0$, sans constante cosmologique $\Omega_\Lambda = 0$.**

L'équation 1.19 combinée à l'équation 1.18 nous donne :

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+3w)} \quad (1.24)$$

qui s'intègre immédiatement :

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (1.25)$$

où t_0 est l'âge de l'Univers défini comme la période écoulée entre la singularité $a \simeq 0$ et maintenant :

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \quad (1.26)$$

- **Modèle "de Sitter" : Univers plat $\Omega_k = 0$ sans matière $\Omega_m = 0$ avec constante cosmologique $\Omega_\Lambda \neq 0$.**

L'équation 1.19 donne dans ce cas particulier :

$$H^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.27)$$

Le paramètre de Hubble est alors une constante et le paramètre d'échelle croît exponentiellement. Il s'agit d'un Univers inflationnaire

Les mesures actuelles des paramètres cosmologiques indiquent une valeur non nulle de la constante cosmologique (voir partie 1.4.4), plus précisément, de nos jours $\Omega_{0\Lambda}$ est du même ordre de grandeur que Ω_{0m} . Les mesures du paramètre de courbure indiquent que notre Univers est plat. On a vu précédemment (équation 1.19) que le paramètre de Hubble est donné par la somme de trois termes : un terme de densité, un terme de courbure et un terme proportionnel à la constante cosmologique. Le terme de densité décroît au minimum comme a^{-3} . Par conséquent, si on remonte dans l'histoire de l'Univers, la constante cosmologique et ensuite le terme de courbure deviennent négligeable (si l'on suppose que ce dernier existe). Le modèle "Einstein-de Sitter" se révèle donc d'une grande utilité en cosmologie.

Le modèle "de Sitter", longtemps abandonné, a repris de l'importance de nos jours, notamment depuis l'introduction des modèles d'inflation.

Les modèles sans constante cosmologique

En l'absence de constante cosmologique, le destin de l'Univers est déterminé par le paramètre de densité Ω_{0m} . Supposons que $\Omega_{0m} > 1$, cela implique que $K = 1$. Dans ce cas, d'après la relation 1.19 il existe une valeur a_m du paramètre d'échelle telle que le paramètre de Hubble s'annule. En utilisant 1.18 on obtient $a_m^{(1+3w)} = \rho_0 a_0^{3(1+w)} / c^2$. Ainsi, pour $\Lambda = 0$ un Univers fermé se caractérise par une phase d'expansion suivie d'une phase de recontraction aboutissant à un "Big-Crunch".

Si l'Univers est plat ($\Omega_{0m} = 1$) alors la phase d'expansion dure éternellement, il faut attendre un temps infini pour qu'elle s'arrête.

Pour le cas particulier où $\Omega_{0m} < 1$ caractérisant un Univers ouvert, il n'existe pas de valeur de a telle que le paramètre de Hubble s'annule, et l'expansion de l'Univers ne s'arrête jamais.

1.2 *L'histoire de l'Univers*

Nous allons dans cette partie nous intéresser aux événements qui ont marqué l'histoire de l'Univers, en commençant par la singularité du Big-Bang qui intervient dans la plupart des modèles.

1.2.1 Le Big-Bang

Comme on l'a vu dans la partie 1.1.6, tous les modèles d'Univers homogènes et isotropes contenant un fluide parfait d'équation d'état $p = w\rho c^2$ avec w compris entre 0 et 1 possèdent une singularité à $t = 0$ où la densité et aussi, comme on le verra, la température divergent. Cette singularité est appelée le Big-Bang. Toutefois, il faut noter qu'en présence d'une constante cosmologique non nulle, il existe de nombreux modèles sans Big-Bang, mais les contraintes observationnelles sur les paramètres cosmologiques indiquent une valeur de Λ beaucoup trop faible, et excluent de tels modèles.

Il est probable que le Big-Bang n'ait aucune réalité physique mais qu'il soit simplement la conséquence de l'extrapolation des lois de la relativité générale à des conditions physiques où celles-ci ne sont plus valides. Par conséquent, il est nécessaire de décrire l'Univers au voisinage du Big-Bang avec une nouvelle théorie unifiant la relativité générale avec une théorie quantique. La limite de validité des équations de la relativité générale dans la cadre du modèle de Friedmann peut être fixée par le temps de Planck t_p , qui est extrêmement faible (t_p est de l'ordre de 10^{-43} secondes. Pour $t < t_p$, on s'attend à ce que les effets quantiques dominent.

Le temps de Planck est le temps durant lequel les fluctuations quantiques persistent. En partant du principe d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar \quad (1.28)$$

on peut écrire :

$$m_p c^2 t_p \simeq \hbar \quad (1.29)$$

$m_p \simeq \rho_p (ct_p)^2$ est la masse de Planck et ρ_p est la densité de Planck. D'après les équations de Friedmann $\rho_p \simeq (Gt_p)^{-1}$. Ainsi, suivant 1.29 :

$$t_p \simeq \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} \simeq 10^{-43} \text{ s}. \quad (1.30)$$

1.2.2 L'égalité matière-radiation

Même si la densité d'énergie ρ_m de la matière domine actuellement sur la densité d'énergie ρ_r des photons ($w \simeq 0$), il n'en a pas été toujours de même. On a vu précédemment que :

$$\rho_m = \rho_{0m}(1+z)^3 \quad (1.31)$$

et

$$\rho_r = \rho_{0r}(1+z)^4 \quad (1.32)$$

Ainsi, il existe un redshift z_{eq} tel que pour $z > z_{eq}$ l'Univers est dominé par le rayonnement. La transition entre les deux périodes d'évolution de l'Univers se produit à

$$1 + z_{eq} = \frac{\rho_{0r}}{\rho_{0m}} \quad (1.33)$$

D'après les valeurs actuelles des paramètres cosmologiques (ρ_{0r} est donné par les mesures du satellite COBE de la quantité de photons du fond diffus cosmologique à 3K) on obtient $z_{eq} \simeq 4 \times 10^4$.

Nous avons négligé pour ce calcul les interactions entre les photons et la matière en supposant que les deux fluides évoluent séparément, mais nous savons qu'avant un temps $t = t_d$ (que l'on appelle temps de découplage), matière et radiation étaient fortement couplés (notamment les températures des photons et des baryons n'évoluent plus indépendamment mais sont égales, voir le paragraphe "recombinaison et découplage" de la partie suivante). Un calcul plus rigoureux devrait inclure ce couplage, cependant on peut montrer que son influence sur l'évolution de l'Univers est relativement faible.

1.2.3 L'histoire thermique de l'Univers

Dès 1946, Gamow avait envisagé que si l'Univers était plus chaud dans le passé, alors les réactions nucléaires qui ont dû s'y produire pourraient expliquer l'origine et l'abondance des éléments (Gamow, 1946). Gamow prédit aussi qu'il devait exister un rayonnement fossile de cette période qu'il estima à 5 K (Gamow, 1948).

L'histoire de l'Univers n'est en fait qu'une suite de phases d'équilibres où les transitions sont des étapes majeures. Nous allons dans cette partie retracer les grandes lignes de l'histoire thermique de l'Univers, la figure 1.2 en montre quelques périodes clés.

Recombinaison et découplage

A notre époque, les composantes matière et radiation de l'Univers sont découplées. Les températures de la matière T_m et de la radiation T_r évoluent indépendamment. Calculons tout d'abord l'évolution de la température de la matière. En supposant que la composante matière est un gaz monoatomique en expansion adiabatique, la thermodynamique standard nous donne :

$$d \left[\left(\rho_m c^2 + \frac{3}{2} \rho_m \frac{k_B T_m}{m_p} \right) a^3 \right] = - \rho_m \frac{k_B T_m}{m_p} da^3 \quad (1.34)$$

Le terme de gauche traduisant la variation de l'énergie et le terme de droite le travail. Sachant que $\rho_m a^3$ est constant, on en déduit l'évolution de la température en fonction du redshift :

$$T_m = T_{0m}(1+z)^2 \quad (1.35)$$

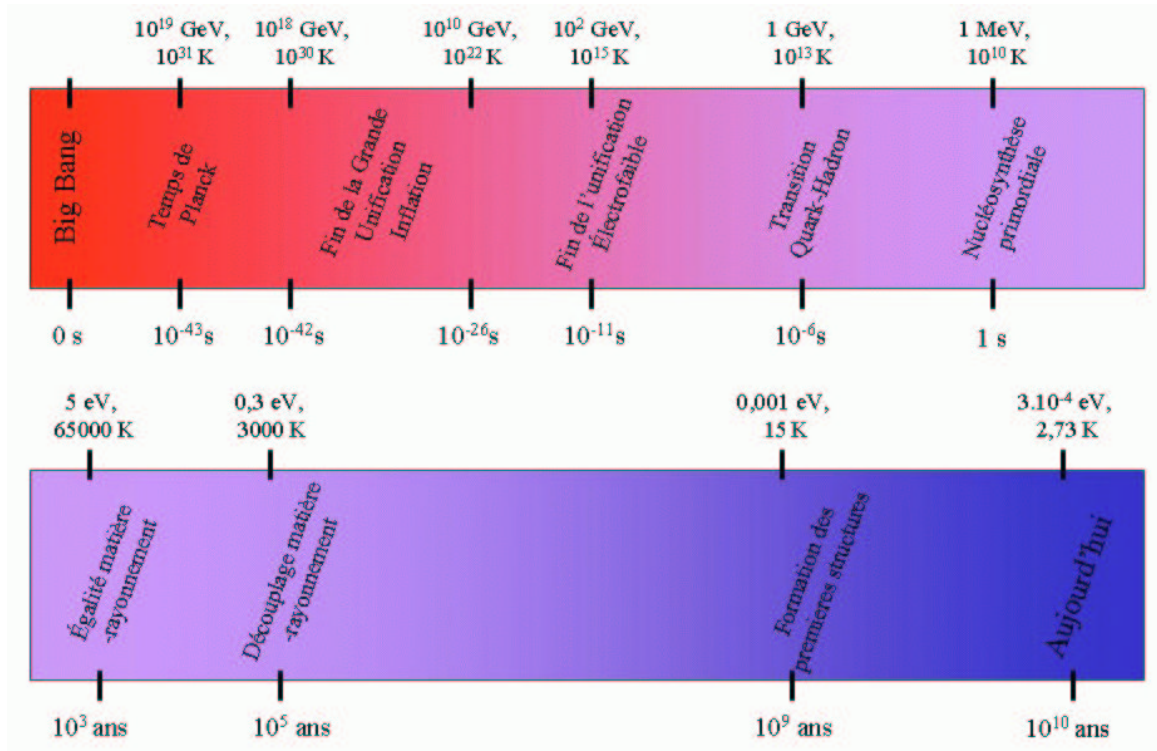


Fig. 1.2: Evènements marquants de l'histoire thermique de l'Univers

Comme l'ont montré les mesures de l'expérience FIRAS à bord du satellite COBE en 1992, la composante radiation, appelée fond diffus cosmologique, est un corps noir à la température actuelle de 2.726 ± 0.004 Kelvins à 95% de niveau de confiance (voir figure 1.3). On peut montrer simplement qu'une loi de distribution de photons de corps noir reste une loi de corps noir au cours de l'expansion, ainsi la notion de température des photons du fond diffus cosmologique prend tout son sens. La relation entre la densité d'énergie des photons et leur température est :

$$\rho_r c^2 = \sigma_r T_r^4 \quad (1.36)$$

en combinant avec l'équation 1.32 on obtient :

$$T_r = T_{0r}(1 + z) \quad (1.37)$$

Le mécanisme principal d'interaction des photons avec la matière est la diffusion Thompson par les électrons libres. A l'époque actuelle, le taux d'interaction Thompson des photons du fond diffus cosmologique est extrêmement faible du fait de la faible densité des électrons dans l'Univers. On a vu que l'Univers est de plus en plus dense, au fur et à mesure que l'on remonte dans le passé mais à des redshifts $z \gtrsim 1000$, il est constitués d'atomes non-ionisés.

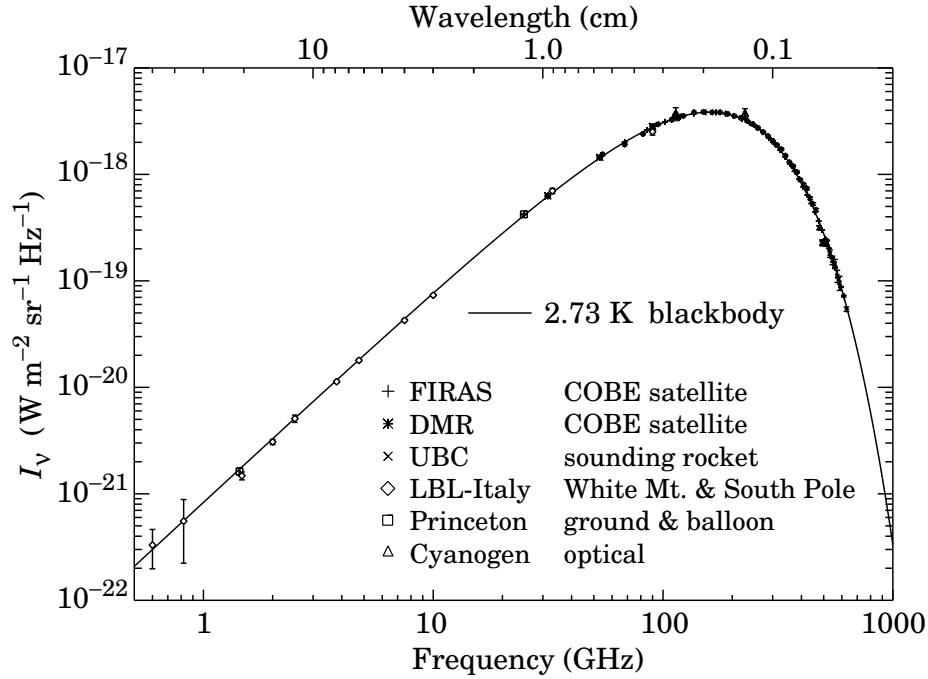


Fig. 1.3: Spectre du CMB obtenu par plusieurs expériences et en particulier par le satellite COBE. La correspondance avec un spectre de corps noir est remarquable. Le meilleur ajustement donne $T = 2.726 \pm 0.004$ K à 95% de confiance (Fixsen et al., 1996).

La température des photons à $z \simeq 1300$ est, d'après l'équation 1.37, $T' \simeq 3780\text{K} \simeq 0.31$ eV. Elle est suffisamment grande pour ioniser les atomes d'hydrogène, le nombre de photons d'énergie supérieure à l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène (13.6 eV) étant suffisamment important. Par conséquent, si on se place à des redshifts supérieurs à 1300 auquel s'ajoute une petite période de transition, correspondant à la période de recombinaison (que l'on devrait appeler "combinaison"), la longueur d'interaction Thompson était extrêmement faible du fait de la grande densité des électrons libres. Les photons sont alors thermalisés et l'Univers est complètement opaque.

La nucléosynthèse primordiale

En remontant davantage vers les premiers instants de l'Univers, entre 10^{-2} à 10^2 secondes après le Big-Bang, la température était de l'ordre de $10^9 - 10^{11}$ K. Les premiers noyaux atomiques se formèrent. A cette température, les protons et les neutrons ne sont plus à l'équilibre et, par collision, synthétisent le deutérium. Le tritium est ensuite synthétisé ainsi que l'hélium 3 et 4 et enfin le lithium 6 et 7. Les abondances après la période de la nucléosynthèse primordiale peuvent être prédites en

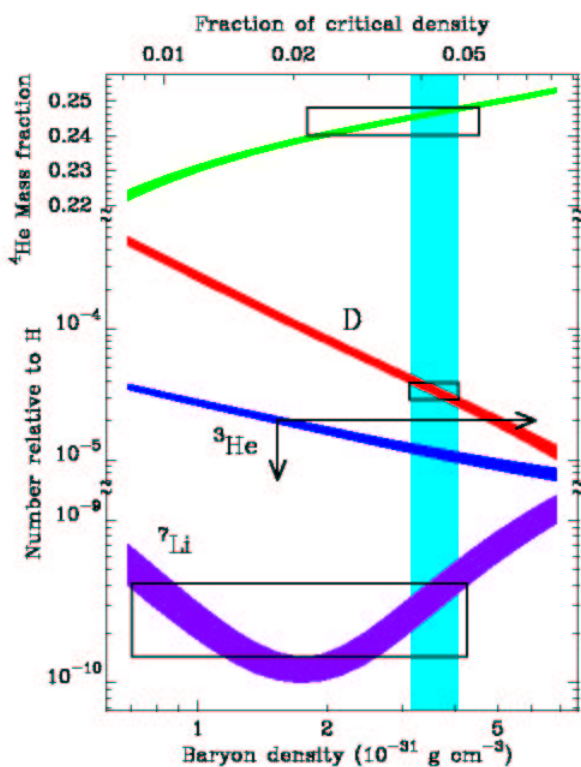


Fig. 1.4: Abondance des noyaux d'⁴He, D, ³He, ⁷Li (Nollett et Burles, 2000). Les courbes en couleur sont les abondances prédites par le modèle standard de la nucléosynthèse primordiale. Les rectangles délimitent les valeurs observées. La bande verticale indique la valeur de η estimée.

fonction du paramètre η (rapport du nombre de baryons sur le nombre de photons), comme le montre la figure 1.4. La mesure des abondances en éléments légers dans l'Univers permet donc de contraindre la densité de baryons dans l'Univers, (la densité de photons étant par ailleurs mesurée précisément par les expériences CMB). Les mesures actuelles donnent : $0,017 \leq \Omega_b h^2 \leq 0,023$ (Cyburt et al., 2001), Ω_b étant la partie baryonique de Ω_m .

De la nucléosynthèse au temps de Planck

Pendant l'époque de la nucléosynthèse primordiale a lieu le découplage des neutrinos. Tout comme les photons, ils constituent de nos jours un fond de rayonnement.

La transition de phase quark-hadron, qui est l'époque de la synthèse des nucléons, a lieu lorsque l'Univers est à la température de 10^{13} K. A température supérieure, l'état stable est un plasma de quarks et de gluons. A la température de 10^{16} K se produit la transition de phase électrofaible. Ainsi, la force électromagnétique et les interactions faibles commencent à se différencier avec le mécanisme de Higgs brisant la symétrie $SU(2) \otimes U(1)$.

Au delà de la température 10^{26} K correspondant à 10^{-34} seconde après le Big-Bang, les interactions électrofaible et forte sont unifiées. Il est possible que l'asymétrie matière-antimatière soit apparue au cours de la séparation des interactions. L'Univers a connu pendant cette période une phase d'expansion exponentielle appelée "inflation". Ce comportement est la conséquence d'une densité d'énergie constante analogue à une constante cosmologique.

Enfin, au temps de Planck la température de l'Univers était de 10^{31} Kelvins.

1.2.4 L'inflation

L'idée de l'inflation a été proposée pour résoudre certains problèmes qui ne trouvent pas d'explication dans le cadre des modèles standard (où modèles de Friedmann). L'inflation a été d'abord introduite par Starobinsky en 1979 (Starobinsky, 1979), puis reprise par Guth en 1983 (Guth et Weinberg, 1983) et enfin par Linde la même année (Linde, 1983). Ce dernier propose un modèle d'inflation chaotique qui est actuellement le type d'inflation utilisé. L'inflation correspond à une période d'expansion accélérée de l'Univers, due à la présence d'un champ scalaire. Elle intervient aux premiers instants de l'Univers entre $t \simeq 10^{-42}$ s et $t \simeq 10^{-26}$ s. Nous allons d'abord détailler les problèmes du modèle standard qui motivent l'introduction de la théorie de l'inflation. Par la suite nous verrons les solutions apportées.

Les problèmes du modèle de Friedmann

Réécrivons l'équation de Friedmann 1.14 en négligeant la constante cosmologique (à l'époque de l'inflation, Ω_Λ était négligeable devant Ω_m) :

$$\dot{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - Kc^2 \quad (1.38)$$

Ainsi, en utilisant le paramètre cosmologique Ω_T défini par l'équation 1.23, on obtient aisément :

$$(\Omega_T^{-1} - 1)\rho(t)a(t)^2 = (\Omega_{T0}^{-1} - 1)\rho_0 a_0^2 \quad (1.39)$$

En considérant que l'Univers est dominé par la radiation pour $z > z_{eq}$, et est dominé par la matière pour $z < z_{eq}$, l'équation précédente utilisée deux fois et combinée aux

équations 1.35, 1.37, 1.18 nous donne :

$$(\Omega_T^{-1} - 1) = (\Omega_{T_0}^{-1} - 1)(1 + z_{eq})^{-1} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{-2} \quad (1.40)$$

où T et Ω_T sont respectivement la température et le paramètre de densité au temps $t \ll t_{eq}$. Si on exprime l'équation précédente en fonction de la température T_p au temps de Planck, on obtient :

$$(\Omega_T^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1)10^{-60} \left(\frac{T_p}{T} \right)^2 \quad (1.41)$$

En admettant que de nos jours $\Omega_{T_0} \simeq 1$, qui implique $|\Omega_{T_0}^{-1} - 1| \simeq 1$, alors l'équation précédente montre que Ω_T a dû être extrêmement proche de l'unité au voisinage du Big-Bang. On peut vérifier qu'au temps de Planck on a $|\Omega_{T_p}^{-1} - 1| \simeq 10^{-60}$. Cela semble être une coïncidence extraordinaire car dans le modèle standard aucun processus ne peut expliquer $\Omega_T = 1$, Ω_T doit être considéré comme une condition initiale. Ce problème du modèle standard est couramment appelé "problème de la platitude".

Intéressons-nous maintenant à un autre problème du modèle standard qui est celui dit de l'horizon cosmologique. L'âge fini de l'Univers ainsi que la vitesse finie de la lumière impliquent qu'il existe une distance maximale parcourue par un photon depuis l'origine (deux points séparés de plus de cette distance ne peuvent en aucun cas échanger de l'information, ils ne sont pas liés causalement) . Cette distance, appelée "horizon" dépend de la façon dont ce déroule l'expansion de l'Univers. La dimension angulaire de l'horizon à l'époque du découplage (et donc de l'émission du CMB) du point de vue d'un observateur actuel, est voisin de 2° . Le problème vient du fait que les observations du fond diffus cosmologiques montrent que la température n'exécède nulle part des variations relatives de 10^{-5} , or il n'y a aucune raison pour que deux points non causalement connectés soient à la même température.

Le dernier problème que nous mentionnons est celui de la génération des structures. L'Univers n'étant pas homogène à petite échelle, il a existé des petites inhomogénéités primordiales qui ont donné les structures que nous observons. On peut montrer que si les perturbations avaient été créées à l'intérieur de l'horizon "standard" (c'est à dire celui prédit par le modèle standard), alors elles n'auraient pas eu le temps de croître et nous n'observerions pas les structures actuelles. Elles ont donc été produites à l'extérieur de l'horizon "standard". Seuls les défauts topologiques peuvent produire des perturbations à l'extérieur de l'horizon, mais l'analyse de l'amplitude des anisotropies du CMB en fonction de l'échelle montre que les défauts topologiques à eux seuls ne sont pas responsables des fluctuations dans l'Univers.

Les principes de l'inflation

La théorie de l'inflation s'appuie sur les modèles de théorie des champs de la physique des particules qui prédisent l'existence de champs scalaires lors des brisures spontanées de symétrie. La densité d'énergie dans l'Univers au moment de l'inflation est dominée par le potentiel $V(\phi)$ du champ scalaire homogène ϕ relatif à la séparation des interactions forte et électrofaible. La relation entre le lagrangien du champ scalaire et le tenseur T_{ij} permet de calculer les expressions de la densité ρ_ϕ et de la pression p_ϕ du champ :

$$\begin{cases} \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \end{cases} \quad (1.42)$$

On obtient à partir des équations de Friedmann les relations suivantes :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi) \quad (1.43)$$

et

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.44)$$

Nous allons par la suite négliger d'une part la courbure (nous verrons pourquoi par la suite) et d'autre part la constante cosmologique puisqu'on a vu qu'elle était extrêmement petite à l'époque.

L'expansion de l'Univers est exponentielle si H est constant au cours du temps, donc d'après 1.44 si $\dot{\phi} \simeq 0$ et si $V(\phi)$ est constant. Ainsi, le champ doit être piégé dans un minimum local.

De manière générale, pour que l'inflation dure suffisamment longtemps, il est nécessaire que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$V > \dot{\phi}^2 \quad (1.45)$$

et

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \ll H \quad (1.46)$$

On se place dans le cas où la variation du champ au cours du temps est négligeable devant le potentiel. L'ensemble de ces conditions sont appelées "conditions de roulement lent" où "slow roll approximation". Les équations 1.43 et 1.44 deviennent, dans cette approximation :

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H} \quad (1.47)$$

et

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (1.48)$$

Nous pouvons définir les paramètres de roulement lent qui caractérisent l'inflation :

$$\begin{cases} \epsilon(\phi) = \frac{m_{\text{pl}}^2}{16\pi} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \\ \eta(\phi) = \frac{m_{\text{pl}}^2}{8\pi} \left(\frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right) \end{cases} \quad (1.49)$$

La condition de roulement lent implique $\epsilon \ll 1$ et $|\eta| \ll 1$. La solution des équations 1.48 et 1.47 est une expansion exponentielle de l'Univers. Dans le cas général, les modèles d'inflation prédisent $\ddot{a} > 0$.

L'inflation s'arrête brusquement lorsque le champ ϕ sort du minimum local de potentiel.

Les solutions aux problèmes du modèle standard

Les problèmes du modèle standard que nous avons évoqués précédemment sont résolus dans le cadre de la théorie de l'inflation. Prenons le cas où la condition de roulement lent est satisfaite (la démarche restera valable dans le cas plus général : $\ddot{a} > 0$). L'Univers se comporte alors comme en présence d'une constante cosmologique pure en l'absence de matière. Ainsi, le paramètre de densité totale au moment de l'inflation est bien décrit par :

$$\Omega_T = \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{3H^2} \quad (1.50)$$

Supposons que l'Univers possède une courbure non négligeable juste avant l'inflation. En utilisant l'équation 1.23 et l'équation de Friedmann 1.14 avec $\rho = 0$ on obtient :

$$(\Omega_{T_i}^{-1} - 1) = (\Omega_{T_f}^{-1} - 1) \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^2 \quad (1.51)$$

où Ω_{T_i} et Ω_{T_f} sont respectivement les paramètres de densité totale avant et après l'inflation. On peut constater que Ω_T s'approche rapidement de 1 en fonction du temps. La courbure devient alors négligeable dès les premiers instants de l'inflation et s'en suit une croissance exponentielle du paramètre d'échelle faisant encore plus rapidement tendre vers 1 le paramètre Ω_T . Les observations nous indiquent une durée de l'inflation telle que la densité d'énergie totale doit être extrêmement proche de la densité critique. Le problème de la platitude est donc résolu dans le cadre de l'inflation, qui prédit $\Omega_T \simeq 1$.

Qu'en est-il du problème de l'horizon? Tout d'abord, définissons le rayon de Hubble comme la distance propre par rapport à nous des points se déplaçant à la vitesse de la lumière du fait de la simple expansion de l'Univers. Ces points sont fixes en coordonnées comobiles (c'est à dire $\Delta r = 0$). Le rayon de Hubble est donné par :

$$d_H = \frac{c}{H^{-1}} \quad (1.52)$$

Considérons maintenant deux points dans l'espace, de coordonnées comobiles constantes, placés à l'intérieur de l'horizon avant l'inflation. Au moment de l'inflation, la distance propre entre ces deux points, tout comme l'horizon, va s'accroître de plus en plus rapidement car $\ddot{a} > 0$. Au bout d'un certain temps, la vitesse propre d'un des points par rapport à l'autre va dépasser la vitesse de la lumière et leur distance sera supérieure au rayon de Hubble. Ainsi, le rayon de Hubble en coordonnées comobiles d_H/a décroît au cours du temps, la décroissance est même exponentielle si H est constant. Plaçons-nous après l'inflation. L'horizon "standard" prédit par les modèles de Friedmann est de l'ordre de grandeur du rayon de Hubble. En réalité on a vu que l'horizon est beaucoup plus grand, suffisamment pour expliquer la grande homogénéité du CMB sur le ciel. La figure 1.5 montre l'évolution du rayon de Hubble en coordonnées comobiles.

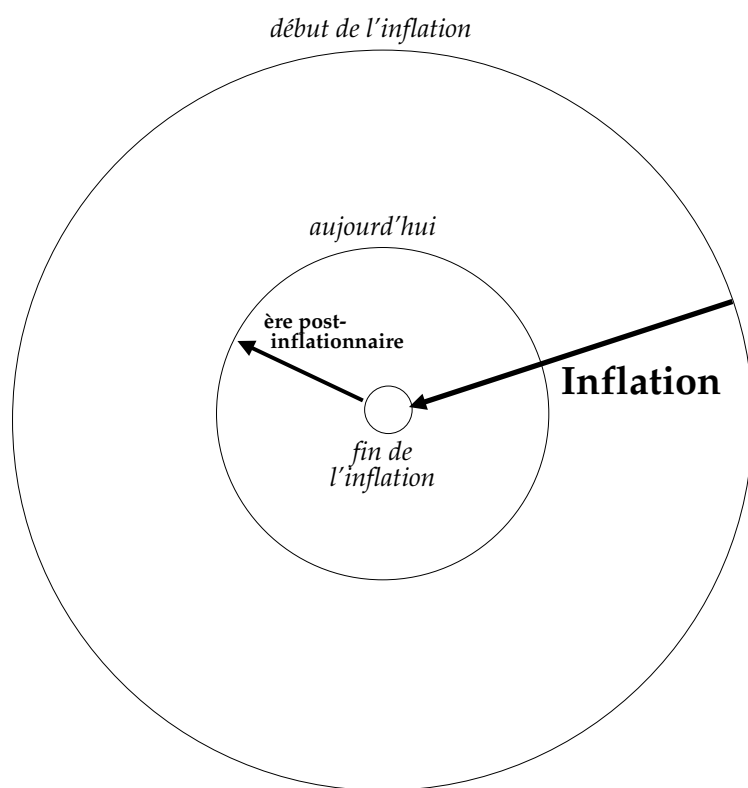


Fig. 1.5: Schéma montrant l'évolution du rayon de Hubble comobile ($cH^{-1}a^{-1}$) pendant et après l'inflation, jusqu'à aujourd'hui. Celui-ci se met à décroître pendant l'inflation et réaugmente ensuite.

Concernant le problème des fluctuations primordiales de densité dans le modèle standard, l'inflation permet d'expliquer leur génération à l'intérieur de l'horizon ainsi que leur croissance, comme on va le voir dans la prochaine section.

1.3 Les fluctuations dans l'Univers

Nous avons jusqu'à présent supposé que l'Univers est homogène et isotrope. Cette supposition est tout à fait valide à grande échelle et permet de traiter l'évolution de l'Univers dans le cadre de la relativité générale. En revanche, l'existence des structures telles que les étoiles, les galaxies, ou les amas de galaxies suggère la formation de petites fluctuations au début de l'histoire de l'Univers, fluctuations à l'origine des anisotropies du fond diffus cosmologique. Nous nous intéressons dans cette partie à l'origine et à l'évolution des fluctuations primordiales

1.3.1 Quelques grandeurs statistiques

Il est utile de définir quelques grandeurs statistiques qui permettent de caractériser les fluctuations dans l'Univers. Intéressons-nous par exemple aux perturbations de la densité de masse. On introduit le contraste de densité de masse en fonction de la position \vec{r} dans l'espace comme :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (1.53)$$

Le principe cosmologique étant vérifié à grande échelle, les propriétés statistiques des fluctuations sont identiques quelle que soit la position dans l'Univers. La fonction de corrélation à deux points des perturbations de densité ne dépend que de la distance r entre les points, elle s'écrit :

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.54)$$

Il est utile de travailler dans l'espace de Fourier car les modes de la décomposition sont décorrélés les uns par rapport aux autres. Ils s'écrivent :

$$\delta_{\vec{k}} = \int \delta(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (1.55)$$

Le spectre de puissance $P(k)$ des fluctuations est la variance des modes de Fourier (à un facteur de normalisation près) et ne dépend que de la norme de \vec{k} :

$$P(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \quad (1.56)$$

ou encore de façon équivalente, le spectre de puissance est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation :

$$P(k) = \int \xi(r) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (1.57)$$

Les mesures de la normalisation et de la forme du spectre de puissance des fluctuations sont d'une grande importance en cosmologie car elles permettent de contraindre les modèles de formation des structures (modèles d'inflation ou de défauts topologiques) ainsi que certains paramètres cosmologiques. De nombreuses recherches sont consacrées à la mesure du spectre de puissance, comme par exemple l'étude de la distribution en position et en redshift des galaxies. Les mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique donnent des contraintes à grande échelle.

1.3.2 Les perturbations cosmologiques

Dans le but de décrire l'origine des perturbations cosmologiques nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'inflation. Nous ne traiterons pas les perturbations créées par les défauts topologiques. En effet, l'hypothèse de telles perturbations est défavorisée par les observations actuelles.

Nous avons supposé, lorsque nous avons traité de l'inflation (voir 1.2.4) que le champ scalaire ϕ est homogène, en accord avec le principe cosmologique. En réalité, les modèles inflationnaires prévoient des fluctuations quantiques de statistique gaussienne de ce champ (voir Brandenberger (1985)). Les fluctuations peuvent être de trois sortes différentes :

- les fluctuations scalaires analogues à des variations de densité
- les fluctuations vectorielles liée à la vorticité du fluide cosmique
- les fluctuations tensorielles identiques à des ondes gravitationnelles.

On peut montrer que seules les fluctuations scalaires et tensorielles peuvent survivre à l'expansion de l'Univers. Les spectres de puissance des perturbations sont décrits dans l'approximation de roulement lent par (en prenant $c = 1$) :

$$P_R(k) = \frac{128\pi G^3}{3} \frac{V^3}{V'^2} \Big|_{aH=k} \quad (1.58)$$

où $P_R(k)$ est le spectre de puissance des fluctuations scalaires et :

$$P_T(k) = \frac{32G^2}{3} V \Big|_{aH=k} \quad (1.59)$$

où $P_T(k)$ est le spectre de puissance des fluctuations tensorielles. k est nombre d'onde comobile, son expression en fonction de la longueur d'onde physique λ est $k = 2\pi a/\lambda$. Les expressions précédentes des spectres de puissance en fonction du potentiel sont évaluées pour $aH = k$, c'est à dire lorsque la longueur d'onde de la fluctuation est égale au rayon de Hubble. En effet, la fluctuation est figée lors de la traversée du rayon de Hubble car aucun processus physique ne peut ensuite agir et la faire évoluer.

$P_R(k)$ et $P_T(k)$ sont relativement bien décrits par des lois de puissance d'indices spectraux respectifs $n_s - 1$ et n_T :

$$\begin{cases} P_R(k) \propto k^{n_s-1} \\ P_T(k) \propto k^{n_T} \end{cases} \quad (1.60)$$

Un autre paramètre que l'on peut introduire est le rapport r entre les spectres de puissance scalaire et tensoriel. L'ensemble de ces paramètres dépend de la forme du potentiel d'inflation. Leur mesure permet ainsi de contraindre les différents modèles. Dans le cas limite où l'expansion de l'Univers est exponentielle pendant l'inflation, n_s et r sont nuls (il n'y a pas de modes tensoriels).

1.3.3 La matière dans l'Univers

La matière noire

L'évolution des perturbations au cours de l'histoire de l'Univers dépend de la nature de la matière qui le compose. Par exemple le fort couplage entre les baryons et les photons avant la recombinaison va engendrer des forces de pression de radiation suffisamment importantes pour s'opposer à la gravité.

Des observations indépendantes, telles que les mesures des anisotropies du CMB, les mesures des fonctions de corrélation de la position des galaxies, ou encore les études de la dynamique des amas de galaxies indiquent des valeurs de Ω_m à notre époque autour de $\Omega_m \simeq 0.3$. Comme on l'a vu précédemment, les mesures d'abondance des éléments donnent une valeur de Ω_b de nos jours bien inférieure ($\Omega_b \lesssim 0.05$), résultat qui est par ailleurs confirmé par les observations du fond diffus cosmologique. Plus de 80% de la masse de l'Univers est ainsi sous forme non-baryonique.

Deux formes de matière noire non-baryonique peuvent être distinguées : la matière noire chaude, relativiste au moment de la formation des structures, et la matière noire froide. Les observations interdisent une quantité importante de matière noire chaude. Un candidat de matière noire ultrarelativiste pourrait être les neutrinos mais les limites supérieures actuelles sur la mesure de leurs masses indiquent une valeur de Ω_ν extrêmement faible.

Par conséquent, une très grande partie de la masse de l'Univers doit être sous forme de matière noire froide ou CDM ("cold dark matter"), mais les particules responsables n'ont jamais été détectées. Les théories des supercordes ou supersymétriques proposent des particules très massives produites aux premiers instant de l'Univers tels que les axions ou les WIMPs ("Weakly Interacting Massive Particles") (Jungman et al., 1996).

Les conditions initiales

Le modèle d'inflation le plus simple (que nous avons introduit précédemment) fait intervenir un champ scalaire unique. Il conduit à des perturbations adiabatiques de la matière. Cela signifie que toutes les espèces physiques, que cela soit les baryons, photons, neutrinos ou la matière noire, sont initialement identiquement réparties. En

tout point de l'espace, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\delta n_b}{n_b} = \frac{\delta n_{\text{CDM}}}{n_{\text{CDM}}} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = \dots \quad (1.61)$$

n est le nombre de particules par unité de volume. Il existe de nombreux modèles d'inflation faisant intervenir plusieurs champs. Supposons par exemple l'existence de deux champs massifs, l'un d'entre eux produisant les particules "standard" : baryons, photons, neutrinos et l'autre les particules de matière noire (Langlois, 1999). L'équation 1.61 n'a alors aucune raison d'être vérifiée. Les observations des anisotropies du fond diffus cosmologique à grande échelle indiquent la présence de conditions initiales adiabatiques, renforçant l'hypothèse d'un seul champ scalaire. Toutefois, un petit écart à l'adiabaticité n'est pas exclu.

1.3.4 Evolution des perturbations

Présentation de la description relativiste des perturbations

Le problème de l'évolution des fluctuations primordiales dans le cadre de la relativité générale peut être traité en partant de la métrique de Robertson-Walker à laquelle on ajoute des petites fluctuations, une perturbation de la matière étant équivalente à une perturbation de la métrique. Pour cela, il est nécessaire que les fluctuations soient petites, hypothèse vérifiée grâce aux observations du fond diffus cosmologique. La forme la plus générale de la métrique de Robertson-Walker perturbée s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = a(\eta)^2 [(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta - (\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] \quad (1.62)$$

où η est le temps conforme défini par la relation : $dt/d\eta = a(\eta)$ et les $\{x_i\}$ sont les trois coordonnées de l'espace. A , B_i et h_{ij} sont les termes de perturbation de la métrique et dépendent des quatre coordonnées d'espace-temps. Le nombre de paramètres est de 10 au total. Si on les annule, on retrouve la métrique de Robertson Walker. On peut décomposer h_{ij} en une composante scalaire, vectorielle et tensorielle et B_i en une composante scalaire et vectorielle.

Certaines transformations entre les coefficients de perturbation (A , B , h) décrivent la même perturbation, car ils dépendent du système de coordonnées choisi. Il est donc nécessaire de choisir une jauge particulière. 6 paramètres seulement sont indépendants, ainsi le choix d'une jauge revient à fixer 4 paramètres. A titre d'exemple, la jauge synchrone est définie pour $A = B_i = 0$.

L'évolution des paramètres de perturbation s'obtient (après de long calculs) en appliquant la loi de conservation de l'énergie-impulsion 1.12 et les équations d'Einstein 1.3 au premier ordre. Il apparaît, à l'issue de ces calculs que les composantes scalaire, vectorielle et tensorielle évoluent indépendamment les unes des autres. Les modes vectoriels diminuent avec l'expansion au point de devenir négligeables.

Traitement classique de l'évolution des perturbations

Le problème de l'évolution des perturbations pour des échelles inférieures à la taille de l'horizon peut être traité dans le cadre de l'approximation newtonienne. Les équations du mouvement classiques d'un fluide unique sont données par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (1.63)$$

l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi = 0 \quad (1.64)$$

et l'équation de Poisson :

$$\Delta \phi - 4\pi G \rho = 0 \quad (1.65)$$

Comme on l'a évoqué dans la section 1.1, les équations de Friedmann, sans le terme de pression relativiste et la constante cosmologique, peuvent être retrouvées en résolvant les équations précédentes pour un Univers homogène et isotrope. Le modèle purement newtonien est donc adapté pour décrire l'évolution des perturbations dans un Univers dominé par la matière. Dans le cas général, afin de rendre compte de l'influence de la pression, certaines corrections relativistes des équations ci-dessus sont nécessaires. Il est intéressant de résoudre ces équations pour un Univers dominé par la matière. La solution particulière s'écrit simplement comme :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \\ \vec{v} &= \dot{\frac{a}{a}} \vec{r} \\ \phi &= \frac{2}{3} \pi G \rho r^2 \\ p &= p(\rho) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Si on perturbe les différentes quantités physiques par des petites fluctuations : $\delta\rho$, δp , $\delta\vec{v}$ et $\delta\phi$, on obtient, en ne conservant que les termes du premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{\delta\rho} + 3\dot{\frac{a}{a}}\delta\rho + \rho(\nabla \cdot \delta\vec{v}) &= 0 \\ \dot{\delta\vec{v}} + \dot{\frac{a}{a}}\delta\vec{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\phi \\ \Delta\delta\phi - 4\pi G\delta\rho &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

où on a négligé les termes $(\vec{r} \cdot \nabla)$ qui, d'ailleurs, sont une conséquence de l'approximation newtonienne. Le point sur les quantités physiques signifie dérivées partielles.

L'ensemble des quantités que l'on a considéré ($\delta\rho, \dots$) admettent des solutions sous la forme d'ondes planes avec des amplitudes dépendantes du temps :

$$\delta u_i = U_i(t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.68)$$

où $\vec{k} = 2\pi/\lambda_0$. a_0/a est le vecteur d'onde comobile. Intéressons nous aux modes de perturbations de densité. A partir des relations 1.67 et en prenant des solutions du type 1.68, on obtient l'équation d'évolution du contraste de densité du fluide :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0 \quad (1.69)$$

La solution est une fonction oscillante. La présence d'ondes acoustiques provient de la compétition entre la pression d'une part qui tend à uniformiser la matière et la gravitation d'autre part qui tend au contraire à faire s'effondrer les structures, comme le montre la relation précédente. Le même comportement peut être mis en évidence dans le cas où l'Univers était dominé par la radiation.

Les résultats précédents sont obtenus en supposant l'existence d'un seul fluide de matière. Si nous supposons des conditions initiales adiabatiques de perturbation, les baryons et photons avant le découplage peuvent être décrits par un fluide unique de densité $\rho_b + \rho_\gamma$ et de pression $p_b + p_\gamma$. En revanche, la matière noire, que l'on va supposer froide, constitue un autre fluide interagissant gravitationnellement avec le précédent. Il est alors nécessaire de rajouter un terme de potentiel de la matière noire dans l'équation 1.69 pour rendre compte de l'évolution des perturbations de densité. Avant le découplage, en négligeant l'influence de la matière noire (même si cette hypothèse n'est pas raisonnable!), la vitesse des ondes de densité était :

$$v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2} \simeq \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}\right)^{-1/2} = \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1+z_{eq}}{1+z}\right)^{-1/2} \quad (1.70)$$

où on a négligé la pression des baryons.

Scénario d'évolution d'un mode de perturbation de densité

Considérons un mode de perturbation de densité adiabatique dont la masse caractéristique est de l'ordre de grandeur de $M \simeq 10^{15} M_\odot$ de nos jours. Cette perturbation est générée au début de l'inflation par des fluctuations quantiques du champ scalaire. Du fait de l'expansion accélérée de l'Univers, elle va traverser le rayon de Hubble et va alors se figer car chaque structure de la perturbation (surdensité ou sousdensité) n'est pas liée causalement aux structures voisines. Après l'inflation, les structures de la perturbation vont évoluer indépendamment, augmentant le contraste de densité, avant de réentrer dans le rayon de Hubble (ce n'est pas le rayon de Hubble qu'il faudrait considérer mais plutôt l'horizon défini en prenant l'origine du temps

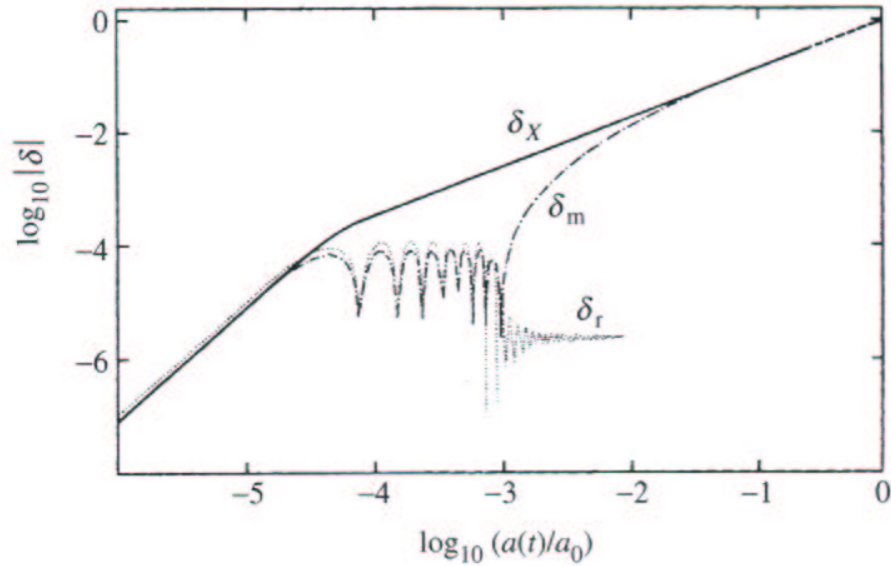


Fig. 1.6: Evolution d'un mode de perturbation de densité adiabatique de masse caractéristique $M \simeq 10^{15} M_{\odot}$ au cours de l'expansion de l'Univers, pour des paramètres cosmologiques standards ($\Omega = 1$, $h = 0.5$). δ_x , δ_m , δ_r sont respectivement les composantes de matière noire, de matière baryonique et de radiation (extrait de Coles & Lucchin (2002)).

approximativement à la fin de l'inflation. Les deux distances sont du même ordre de grandeur). Lorsque la longueur d'onde de la perturbation devient inférieure au rayon de Hubble, le mode de perturbation des photons-baryons commence à croître sous l'effet de la gravitation. Au bout d'un certain temps, le mode rentre dans l'horizon du son (la vitesse du son étant inférieure à c , l'horizon du son est plus petit que l'horizon cosmologique), et se met à osciller car il est soumis à la fois aux forces de gravité et de pression de radiation. La vitesse de propagation est donnée approximativement par la relation 1.70. Le mode de perturbation de la matière noire va quant à lui, continuer à croître sous l'effet de la seule gravitation. Au moment du découplage matière baryonique-rayonnement, le contraste de densité de la matière noire est très supérieur à celui de la matière baryonique. La perturbation arrête d'osciller car la pression devient négligeable et les baryons sont entraînés dans les puits de potentiel de la matière noire. La figure 1.6 résume l'évolution de ce mode de perturbation (voir pour une description détaillée Coles & Lucchin (2002)).

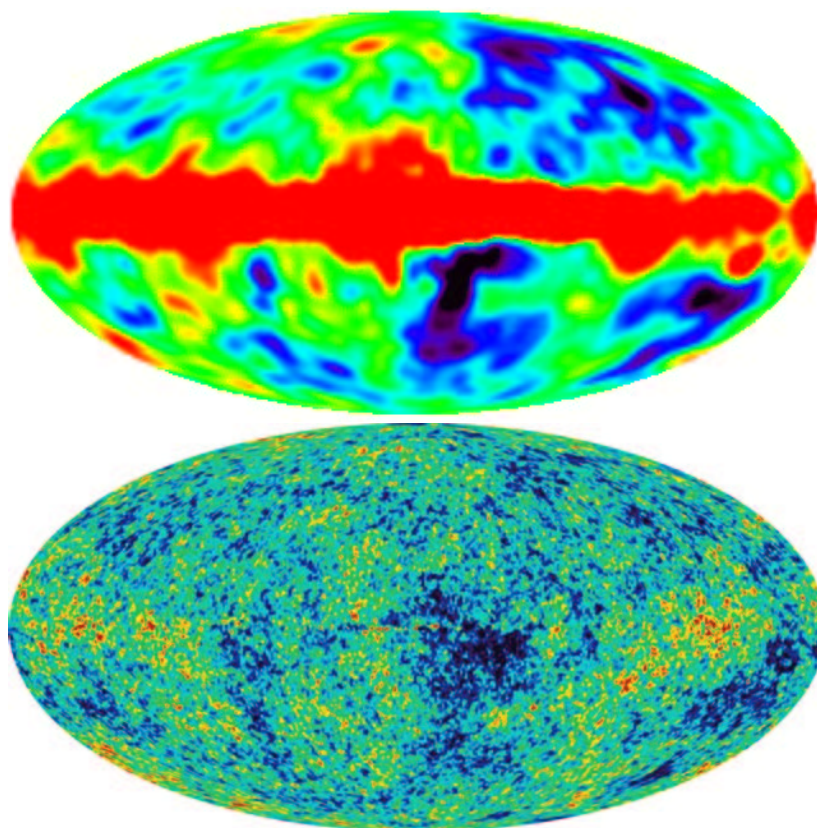


Fig. 1.7: Carte des anisotropies du CMB observée par COBE-DMR à la résolution de 7° (en haut) et par WMAP à la résolution de $12'$ d'arc (en bas). L'émission de la poussière galactique n'a pas été soustraite de la carte observée par COBE-DMR. Elle apparaît le long du grand axe de la carte.

1.4 Les anisotropies du fond diffus cosmologique

Nous avons vu dans la section 1.2.3 qu'après le découplage entre la matière et le rayonnement à $z \simeq 1300$, l'ensemble des photons se sont propagés sans interagir avec la matière. Nous les détectons aujourd'hui dans les domaines millimétrique et submillimétrique à la température très uniforme de 2.726 K. Il existe cependant des petites anisotropies de température du CMB en raison des perturbations de densité ou mêmes tensorielles au moment du découplage. Nous avons traité ces perturbations dans la section précédente. Les anisotropies du CMB ont été détectées pour la première fois par COBE en 1992 à la hauteur de $\Delta/T \sim 10^{-5}$ (Smoot et al., 1992). La résolution angulaire des observations était de 7° . Les anisotropies du CMB ont été récemment mesurées par le satellite WMAP à bien meilleure résolution angulaire ($12'$ d'arc) (Bennett et al., 2003). La figure 1.7 montre les cartes d'anisotropies observées par les deux expériences.

Dans cette section, nous allons voir la façon dont les perturbations affectent la distribution des photons du CMB, mais avant cela, nous introduisons un formalisme utile pour la description des anisotropies.

1.4.1 Le spectre spatial de puissance du CMB

Formalisme

Habituellement, les fluctuations de température en fonction de la position sur la sphère céleste, sont développées dans la base des harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (1.71)$$

T_0 est la température moyenne du CMB (2.726K) et ΔT désigne l'écart par rapport à la température moyenne.

Les harmoniques sphériques sont définies de la manière suivante, pour $m \geq 0$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (1.72)$$

où les P_{ℓ}^m sont les polynômes de Legendre associés. De plus, les harmoniques sphériques obéissent à la propriété :

$$Y_{\ell-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (1.73)$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\Delta T}{T_0}$ soit réel est :

$$a_{\ell m} = a_{\ell-m}^* \quad (1.74)$$

(* signifie complexe conjugué).

Le caractère aléatoire des fluctuations primordiales de densité se retrouve dans les coefficients $a_{\ell m}$. La théorie de l'inflation prédit une distribution gaussienne des perturbations de densité et tensorielles. Comme les processus physiques menant aux anisotropies sont linéaires en raison de la faible amplitude des oscillations, les modes $a_{\ell m}$ sont aussi des variables aléatoires décorrélées suivant une statistique gaussienne. Les éventuels défauts topologiques conduisent quant à eux à des non-gaussianités dans les anisotropies du CMB.

Les variances $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ sont indépendantes du paramètre m car les anisotropies du CMB sont statistiquement isotropes. Nous appelons C_{ℓ} ces variances :

$$C_{\ell} = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle \quad (1.75)$$

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (1.76)$$

Les coefficients C_ℓ en fonction de ℓ forment le spectre de puissance angulaire des anisotropies. Il existe une correspondance entre l'ordre multipolaire ℓ et l'échelle des fluctuations sur le ciel. Pour ℓ suffisamment grand, $\ell \propto \frac{1}{\theta}$, $\ell = 200$ correspondant aux échelles $\theta \simeq 1^\circ$.

La variance cosmique

On ne peut obtenir qu'une estimation des C_ℓ que l'on notera C_ℓ^{est} (l'Univers ne nous fournit qu'un seul "tirage"). Idéalement, dans le cas où les observations sont réalisées avec un détecteur parfait :

$$C_\ell^{\text{est}} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} |a_{\ell m}|^2 \quad (1.77)$$

L'estimation des C_ℓ aux grandes échelles angulaires (ℓ petits) ne peut fondamentalement pas être très précise. En fait, il n'existe que très peu de portions du ciel indépendantes aux grandes échelles angulaires pour avoir une bonne estimation des C_ℓ . On définit la variance cosmique de la manière suivante :

$$V_{\text{cosmique}} = \langle (C_\ell^{\text{est}} - C_\ell)^2 \rangle \quad (1.78)$$

Le nombre de mode indépendant à un l donné étant $(2l + 1)/2$ (le facteur $1/2$ est dû au fait que les coefficients a_{lm} et a_{l-m} ne sont pas indépendants et vérifient 1.74), on obtient :

$$V_{\text{cosmique}} = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2 \quad (1.79)$$

Le dipôle

Le dipôle est la première anisotropie du CMB qui a été détecté, en raison de sa grande amplitude comparativement aux fluctuations à plus petite échelle :

$\Delta T_{\text{dipole max}} = (3.358 \pm 0.023) \text{ mK}$ (Lineweaver et al., 1996). La quasi-totalité du dipole n'est pas d'origine cosmologique, mais reflète le mouvement de la Terre par rapport au flot de Hubble induisant un effet Doppler (tout point fixe en coordonnées comobiles suit le flot de Hubble). L'effet Doppler est proportionnel au cosinus de l'angle entre la position sur le ciel considérée et l'axe défini par le mouvement de la Terre. Décomposé dans la base des harmoniques sphériques, il donne des modes à $\ell = 1$ uniquement.

Ce mouvement est la somme des mouvements de rotation de la Terre autour du soleil, du soleil autour du centre galactique et du déplacement de la Galaxie au sein de l'amas local. L'instrument DMR de COBE a permis de mesurer la direction de l'axe du dipôle : $l = (164.31 \pm 0.16)^\circ$ et $b = (48.05 \pm 0.09)^\circ$ ainsi que son amplitude (précisée au début du paragraphe).

1.4.2 L’empreinte des fluctuations sur le fond diffus cosmologique

Les anisotropies du CMB sont la conséquence des fluctuations de la métrique et du comportement de la matière entre le moment du découplage et aujourd’hui. Les différents effets des perturbations sur les anisotropies sont classées en deux groupes qui sont les sources primaires et les sources secondaires (on pourra voir la thèse de Hu (1995) pour une description détaillée).

Les sources primaires sont dominantes, elles agissent au moment du découplage. Ce sont les suivantes :

- Les photons émis dans une zone de surdensité auront une température plus élevée, à condition que les modes de perturbations soient adiabatiques.
- Les photons émis dans une zone de surdensité perdent de l’énergie en franchissant la barrière de potentiel gravitationnel. L’effet Sachs-Wolfe est la combinaison de cet effet avec le précédent.
- Les photons émis dans une zone en mouvement radial par rapport à nous, due aux oscillations acoustiques, subira un effet Doppler.

Notons que la décomposition du mécanisme global de création des anisotropies en plusieurs effets distincts ne peut se faire que dans une jauge particulière (on a adopté ici implicitement la jauge newtonienne).

Les sources secondaires d’anisotropies se situent entre le découplage et nous. Ce sont les suivantes :

- L’effet Sachs-Wolfe intégré dû à la variation du potentiel gravitationnel au cours de la trajectoire des photons.
- L’effet Rees-Sciama dû aux potentiels gravitationnels créés par les structures qui se sont effondrées après le découplage.
- L’effet Sunyaev-Zel’dovich (SZ) issue de l’interaction des photons du CMB avec les électrons chauds des amas de galaxies (nous traiterons de cet effet dans la partie 2.2.2).
- L’effet de lentille gravitationnelle par les amas modifiant la trajectoire des photons.
- La réionisation de l’Univers par la lumière des premières étoiles. Elle a pour effet de réduire l’amplitude des anisotropies.

Contrairement aux autres sources d’anisotropies secondaires, la réionisation et l’effet SZ peuvent avoir une contribution relativement importante. L’effet SZ (du moins l’effet SZ thermique) a la particularité de pouvoir être isolé par les méthodes de séparation de composantes que je traiterai en détail au cours de cette thèse.

Nous allons maintenant voir comment et à quelles échelles angulaires ces effets interviennent.

Les grandes échelles angulaires

Aux grandes échelles angulaires, supérieures à la taille de l'horizon au moment du découplage qui correspond à environ 2° , l'effet très largement dominant est l'effet Sachs-Wolfe. Les photons perdent d'une part de l'énergie en s'échappant des puits de potentiel des surdensités. La relation entre la variation de température des photons et la variation de potentiel est :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\delta\phi}{c^2} \quad (1.80)$$

D'autre part, si les conditions initiales sont adiabatiques, les surdensités de matière correspondent à des surdensités de photons. L'écart de température qui correspond à cet effet est relié à la différence de potentiel gravitationnel par la relation :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{3} \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{2}{3} \frac{\delta\phi}{c^2} \quad (1.81)$$

L'effet résultant est donc une perte d'énergie des photons provenant d'une zone de surdensité, et on a au total :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\phi}{c^2} \quad (1.82)$$

Comme les modes de perturbation considérés ne sont pas entrés dans l'horizon avant le découplage, ils n'ont pas subi de transformations depuis l'inflation. La première conséquence est qu'il n'y a pas d'effet Doppler agissant aux grandes échelles angulaires. La seconde est que le spectre de puissance du CMB à bas ℓ est directement relié au spectre de puissance des fluctuations primordiales qui est proche d'être, selon les modèles d'inflation, invariant d'échelle. On parle de plateau Sachs-Wolfe à bas ℓ . Si les fluctuations primordiales sont isocourbes, l'équation 1.81 n'est pas vérifiée et le terme de température correspondant s'annule. On s'attend ainsi à trouver un plateau Sachs-Wolfe six fois plus haut que pour des modes adiabatiques. La mesure du niveau du plateau par COBE est en accord avec les prédictions pour des modes adiabatiques de perturbations.

Les échelles angulaires moyennes

Aux échelles inférieures à environ 2° , les perturbations correspondantes sont entrées dans l'horizon avant le découplage. Elles sont d'abord passées par une phase de croissance avant d'entrer dans l'horizon du son, pour ensuite osciller par le jeu de la pression et de la gravitation. Ainsi, une série de pics et de creux sont attendus dans le spectre de puissance du CMB. Les pics correspondent aux modes ayant oscillé pendant un nombre entier de fois leur demi-période. Ces modes sont alors à leur maximum d'amplitude et l'effet Sachs-Wolfe y est dominant. Les modes de perturbations qui sont aux échelles angulaires des creux dans le spectre de puissance, ont, au moment

du découplage, des contrastes de densité quasiment nuls, mais ils évoluent à leur vitesse maximale. L'effet Doppler des photons émis par des régions en mouvement joue alors un rôle en limitant la profondeur des creux du spectre. L'écart de température relatif à l'effet Doppler est :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{v}{c} \quad (1.83)$$

Les petites échelles angulaires

Aux petites échelles angulaires, les modes de perturbations ont eu le temps d'osciller pendant plusieurs demi-périodes avant le découplage. Cela se traduit par différents pics dans le spectre de puissance du CMB. Toutefois, l'énergie d'oscillation est peu à peu dissipée au cours du temps en raison de diffusions thermiques conduisant à un amortissement des ondes acoustiques. Aussi, le découplage ne se produisant pas instantanément, les anisotropies de températures du CMB que l'on observe sont en réalité intégrées sur l'ensemble du temps de découplage. Ainsi lorsque l'intervalle $c\Delta t_{\text{Dec}}$ devient de l'ordre de grandeur de la taille des perturbations, les anisotropies sont diluées. L'association des effets de dissipation et de dilution induisent une forte décroissance du spectre de puissance du CMB à haut ℓ , cet effet est appelé le “damping” ou l'amortissement du spectre.

La figure 1.8 montre une des prédictions théoriques du spectre de puissance des anisotropies du CMB pour les valeurs des paramètres cosmologiques actuellement mesurées.

1.4.3 Influence des paramètres cosmologiques

Toutes les informations sur la physique et sur la géométrie de l'Univers qu'il est possible d'obtenir de l'étude des anisotropies du CMB sont contenues dans son spectre de puissance, car les anisotropies sont homogènes, isotropes, et de statistique gaussienne (dans la cadre du modèle inflationnaire). A partir de l'analyse de la forme du spectre de puissance, il est possible d'obtenir une mesure d'un certain nombre de paramètres cosmologiques (ou de combinaisons) que nous avons pour la plupart évoqués au cours des sections précédentes. Dans cette partie, nous montrons qualitativement l'influence de quelques paramètres cosmologiques sur le spectre de puissance.

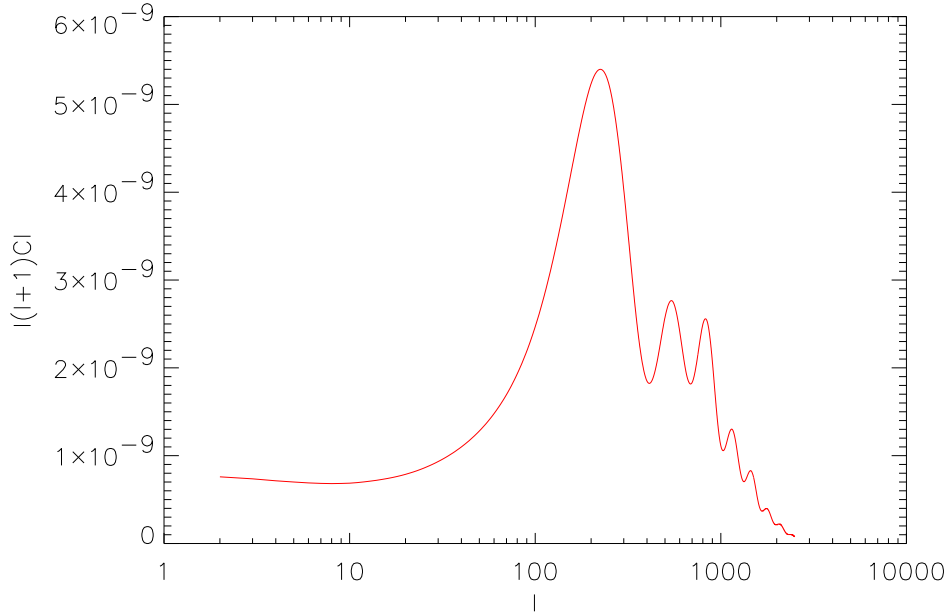


Fig. 1.8: Prédiction théorique du spectre de puissance des anisotropies du CMB pour les valeurs des paramètres cosmologiques suivantes : $\Omega = 1$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_b = 0.045$ et $h = 0.65$. Le spectre de puissance a été calculé avec l’algorithme de calcul numérique “CMBfast”. Le plateau Sachs-Wolfe apparaît à bas ℓ , suivi des pics acoustiques. A haut ℓ l’effet de “damping” est visible.

Le paramètre de densité totale Ω_T et le paramètre de Hubble h

Il est possible de calculer la taille de l’horizon du son, ainsi que la distance propre de la surface de dernière diffusion par rapport à nous et au moment du découplage. Le rapport entre ces deux quantités permet d’obtenir l’angle solide sous-tendu par l’horizon et, de manière équivalente, le multipôle ℓ de la position du premier pic acoustique du spectre de puissance, si l’Univers était Euclidien. La valeur du paramètre de densité totale est reliée, comme on l’a vu, à la courbure moyenne de l’Univers. Si $\Omega_T > 1$ alors la courbure est positive, l’horizon du son nous apparaît plus grand à cause d’un effet de “convergence des photons” (voir figure 1.9). De ce fait, le premier pic acoustique est décalé vers les faibles valeurs de ℓ . Le comportement inverse est obtenu pour $\Omega_T < 1$.

Le résultat du calcul : taille de l’horizon sur distance va dépendre de la vitesse d’expansion au cours du temps et en particulier du paramètre de Hubble h (et aussi de Ω_Λ). La mesure de la position du premier pic acoustique donne donc en réalité une combinaison entre plusieurs paramètres qui sont principalement Ω_T et h . En recoupant avec la mesure de h par le télescope spatial Hubble, la mesure de Ω_T devient possible. La figure 1.10 donne les contraintes apportées sur ces deux paramètres par

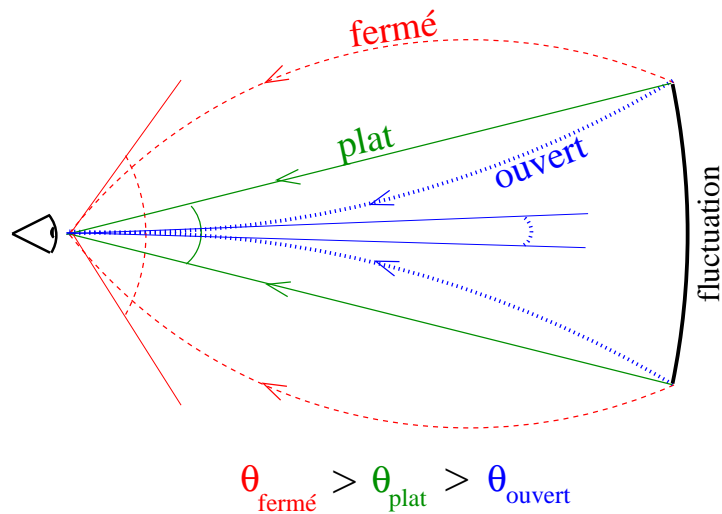


Fig. 1.9: Taille angulaire des fluctuations suivant la géométrie de l'Univers (Figure tirée de Revenu (2000)).

les expériences CMB seules et avec les mesures du télescope spatial Hubble.

Le paramètre de densité baryonique $\Omega_b h^2$

L'amplitude des oscillations acoustiques des perturbations avant le découplage est une fonction croissante de la densité des baryons. Plus, elle sera importante, plus les pics acoustiques du spectre de puissance seront hauts. De plus, la variation du potentiel gravitationnel pendant les oscillations des ondes acoustiques, sera d'autant plus forte que la densité des baryons sera grande. La conséquence d'une densité plus forte est une diminution relative des pics acoustiques pairs par rapport aux pics impairs. Un troisième effet est dû à la vitesse du son dépendant du rapport des densité de baryons et de photons comme le montre la relation 1.70. Une valeur de $\Omega_b h^2$ plus grande va réduire la vitesse du son et ainsi augmenter l'écart entre les pics du spectre de puissance.

La constante cosmologique Ω_Λ

La présence d'une constante cosmologique induit un effet Sachs-Wolfe intégré. La conséquence est une augmentation de la puissance des anisotropies à grande échelle angulaire. La hauteur du pic par rapport au plateau Sachs-Wolfe sera affectée. Par ailleurs, la relation distance angulaire-redshift et donc la position du premier pic acoustique dépendent de la constante cosmologique.

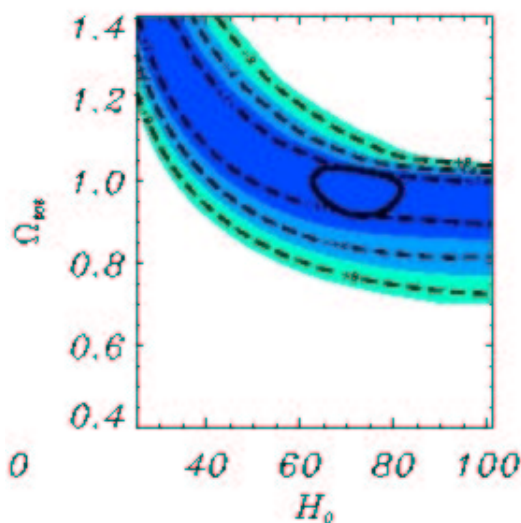


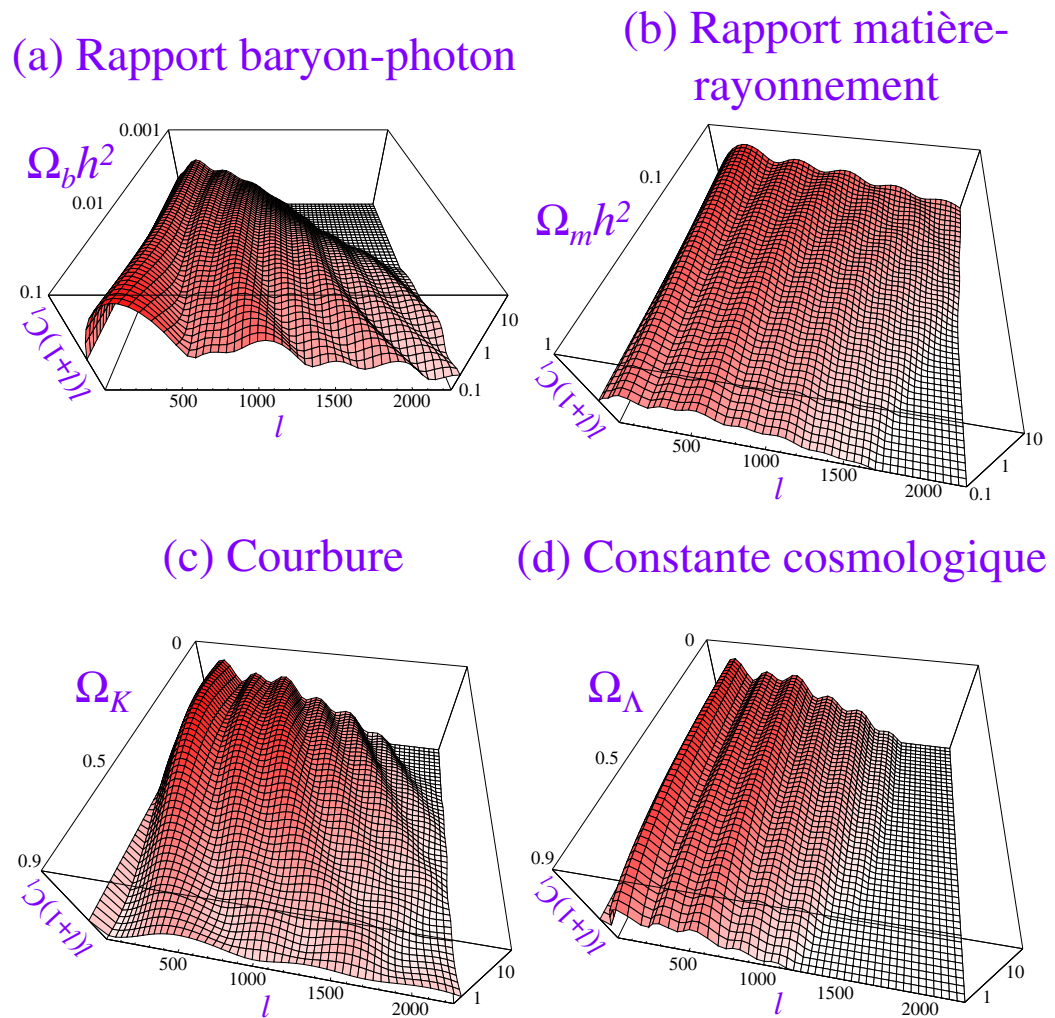
Fig. 1.10: Contraintes apportées par les expériences CMB (avant WMAP) sur les paramètres H_0 et Ω_T . Les lignes en pointillés indiquent les contours à 1, 2 et 3 sigmas. La direction de dégénérescence apparaît clairement. Le contour en noir indique la limite à 1 sigma que l'on obtient en ajoutant les contraintes du télescope spatial Hubble.

Les paramètres des spectres de puissance des fluctuations primordiales

La forme des spectres de puissance des fluctuations primordiales a naturellement une influence sur le spectre de puissance des anisotropies du CMB. Voici les paramètres des modèles les plus simples d'inflation (voir 1.3.2) et leurs influences :

- n_s : l'indice spectral des fluctuations primordiales de densité. Plus n_s est important, plus la puissance des petites échelles sera importante.
- A_s : l'amplitude des fluctuations primordiales de densité. A_s donne aussi l'amplitude du spectre de puissance du CMB, excepté à bas ℓ où les modes tensoriels peuvent contribuer.
- n_t : l'indice des fluctuations primordiales tensorielles. On a le même comportement que pour n_s aux échelles supérieures à l'horizon seulement. Aux plus petites échelles, les ondes gravitationnelles sont dissipées.
- A_T : l'amplitude des fluctuations primordiales tensorielles. La somme de A_T et A_s donne l'amplitude du plateau Sachs-Wolfe.

La figure 1.11 montre le comportement du spectre de puissance du CMB lorsqu'on fait varier certains paramètres cosmologiques



adapté de W.Hu 2/98

Fig. 1.11: Evolution du spectre de puissance en fonction des paramètres cosmologiques. Pour chaque figure, seul le paramètre précisé varie.

1.4.4 Mesures actuelles

Les mesures du spectre de puissance des anisotropies du CMB par l'ensemble des expériences couvrent aujourd'hui une grande gamme d'échelles angulaires. Le satellite COBE en 1992 a observé la totalité du ciel à une résolution angulaire de 7° fournissant des mesures précises du plateau Sachs-Wolfe entre $\ell = 3$ et $\ell \simeq 20$ (Smoot et al., 1992). Plusieurs expériences ballon ont par la suite permis d'obtenir des mesures au voisinage du premier pic acoustique $\ell \simeq 200$. En 2000, les expériences ballon BOOMERanG (de Bernardis et al., 2000) et MAXIMA (Hanany et al., 2000) dont la résolution angulaire était voisine de 10 minutes d'arc, ont obtenues des mesures à plusieurs échelles angulaires dans la gamme $100 \lesssim \ell \lesssim 1000$. Ces mesures ont permis de mettre en évidence le premier pic acoustique prédit par l'inflation et "laissent deviner" les deuxième et troisième pics acoustiques. Plus récemment, les expériences au sol DASI (Halverson et al., 2002) et CBI (Mason et CBI Collaboration, 2001) ont apporté des mesures à des échelles angulaires relativement petites, allant du second pic acoustique jusqu'à $\ell \simeq 2500$. L'amortissement du spectre à haute fréquence, que j'ai évoqué dans la partie 1.4.2, a été mis en évidence. Toutefois, un excès de puissance par rapport aux modèles pour $\ell \gtrsim 1500$ a été observé par CBI. Cet excès est aussi vu par les expériences VSA (Grainge et al., 2003) et ACBAR (Kuo et al., 2002), qui ont publié les résultats de leurs dernières analyses depuis le mois de décembre 2002. Archeops est la première expérience à avoir couvert la gamme de fréquences se situant entre $\ell \simeq 20$ et $\ell \simeq 100$ (Benoît et al., 2003a). Elle a permis de faire le lien entre les mesures de COBE et celles de BOOMERanG et MAXIMA. L'expérience Archeops a aussi permis de mesurer avec une grande précision le premier pic acoustique. Durant le mois de Février 2003 ont été publiés les premiers résultats du satellite Américain WMAP. La mesure du spectre de puissance obtenue avec WMAP à l'issue d'une année d'observation de la totalité du ciel, est extrêmement précise sur une très grande gamme d'échelles angulaires, allant de $\ell = 2$ jusqu'à $\ell \simeq 600$ (Hinshaw et al., 2003). L'expérience WMAP fournit les mesures les plus précises actuellement des premier et second pics acoustiques.

L'ensemble des résultats obtenus sur le spectre de puissance du CMB sont compilés dans les figures 1.12 et 1.13.

L'ensemble des mesures du spectre de puissance du CMB permet d'obtenir une estimation relativement précise de plusieurs paramètres cosmologiques. Le recoupement avec des observations indépendantes en cosmologie, sensibles à d'autres combinaisons entre les paramètres permet de lever les dégénérescences inhérentes au CMB. Par exemple, on a vu que le télescope spatial Hubble permet la mesure la plus précise du paramètre de Hubble. Lorsque les résultats sont associés aux données du CMB, ils conduisent à la détermination du paramètre de densité totale : $\Omega_{T0} = (1.02 \pm 0.02)$ (Spergel et al., 2003). Un autre exemple concerne les mesures du redshift et de la distance des supernovae de type Ia. Elles permettent de mesurer le paramètre de

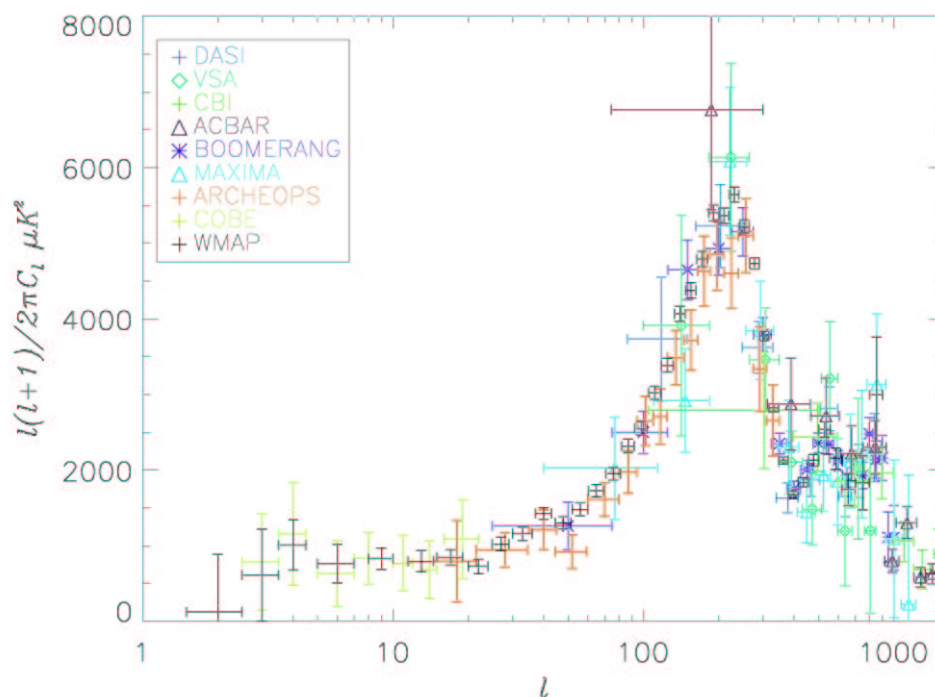


Fig. 1.12: Résultats récents de la mesure du spectre de puissance du CMB aux moyennes et grandes échelles angulaires.

décélération de l'Univers de nos jours (Perlmutter et al., 1999), donné par la combinaison : $2\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda0}$. L'analyse jointe des supernovae avec le CMB permet de contraindre Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda0}$ (voir par exemple Tegmark (1999)).

Les mesures les plus récentes de quelques paramètres cosmologiques par l'ensemble des expériences CMB sont données dans la table 1.1.

Les mesures récentes du satellite WMAP ont permis de révéler quelques caractéristiques inattendues :

- Le quadrupôle ($\ell = 2$) et l'octopôle ($\ell = 3$) sont bas comparés aux prédictions du modèle standard. De plus, ils semblent alignés. La probabilité que se produisent de telles coïncidences est de $1/25000$ environ (de Oliveira-Costa et al., 2003).
- La réionisation se serait produite relativement tôt dans l'histoire de l'Univers ($z = 20 \pm 5$).
- Le spectre de puissance primordial des fluctuations scalaires n'est pas pleinement compatible avec une simple loi de puissance. Un développement au premier ordre en n_s suffit à rendre compte des observations du CMB, de la forêt Lyman

Tab. 1.1: Mesures récentes des paramètres cosmologiques (Bennett et al. 2003)

Description	Symbole	Valeur	$\sigma +$	$\sigma -$
Densité totale	Ω_{tot}	1.02	0.02	0.02
Densité d'énergie noire	Ω_{Λ}	0.73	0.04	0.04
Densité de Baryons	Ω_b	0.044	0.004	0.004
Densité de la matière	Ω_m	0.27	0.04	0.04
Normalisation du spectre de puissance (pour $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	A	0.833	0.086	0.083
Indice spectral scalaire (pour $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	n_s	0.93	0.03	0.03
Paramètre de "running" (pour $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	$dn_s/d \ln k$	-0.031	0.016	0.018
Rapport tenseur-scalaire (pour $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$)	r	< 0.90	95% IC	—
Redshift du découplage	z_{dec}	1089	1	1
Largeur du découplage (FWHM)	Δz_{dec}	195	2	2
Constante de Hubble	h	0.71	0.04	0.03
Age de l'Univers (en G années)	t_0	13.7	0.2	0.2
Age de découplage (en k années)	t_{dec}	379	8	7
Age de la réionisation (en M années, 95% IC)	t_r	180	220	80
Redshift de la période d'égalité matière-rayonnement	z_{eq}	3233	194	210
Epaisseur optique de la réionisation	τ	0.17	0.04	0.04
Redshift de la réionisation (95% IC)	z_r	20	10	9

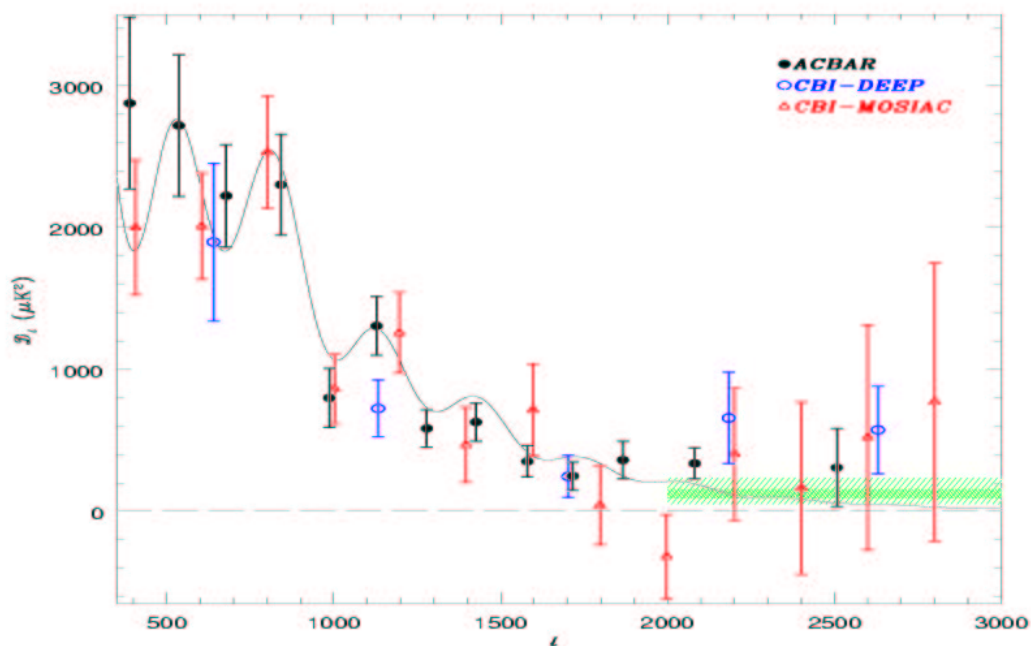


Fig. 1.13: Résultats récents de la mesure du spectre de puissance du CMB aux petites échelles angulaires. La zone en vert délimite le domaine spectral où un excès de puissance des anisotropies a été mesuré.

α et de la distribution des galaxies.

Certaines dégénérescences dans la détermination des paramètres cosmologiques pourront être levées grâce à la mesure de la polarisation du CMB ¹. Un des nombreux objectifs du satellite Planck, qui sera lancé en 2007, est la mesure des modes de polarisation de parité impaire. Ces modes ne peuvent exister initialement qu'en présence d'ondes gravitationnelles primordiales. Leur mesure permettra en particulier de placer des contraintes fortes sur les modèles d'inflation.

¹ le satellite WMAP a déjà apporté des contraintes sur le spectre de puissance croisé entre la polarisation et la température du CMB.

2. LES ÉMISSIONS D'AVANT PLAN

Dans le domaine de longueur d'onde millimétrique, favorable à l'observation du CMB, de nombreuses émissions astrophysiques viennent se superposer aux anisotropies dans les observations. Ces émissions d'avant-plan sont de différentes origines (le terme d' "avant-plan" est utilisé car il s'agit de sources d'émission situées devant le CMB). Une grande partie d'entre elles provient de notre propre galaxie, comme l'émission thermique de la poussière interstellaire, l'émission synchrotron des électrons ultrarelativistes dans le champ magnétique ambiant, ou encore le rayonnement de freinage des électrons appelé émission Bremsstrahlung. D'autres émissions sont d'origine extragalactique ; elles comprennent les émissions des radiogalaxies et les effets Sunyaev-Zel'dovich qui résultent de l'interaction des photons du CMB avec les électrons chauds des amas de galaxies. Ces émissions "parasites", bien que faibles en comparaison au corps noir cosmologique, sont particulièrement gênante pour la mesure des fluctuations du CMB qui ne possèdent une amplitude relative (par rapport au niveau moyen du CMB) que de l'ordre de 10^{-5} . La figure 2.1 montre la déviation standard attendue des fluctuations de la plupart des composantes en fonction de la fréquence d'émission, estimée dans une région restreinte du ciel ($12^\circ \times 12^\circ$), à haute latitude galactique et pour une résolution angulaire de 2.5 minutes d'arc.

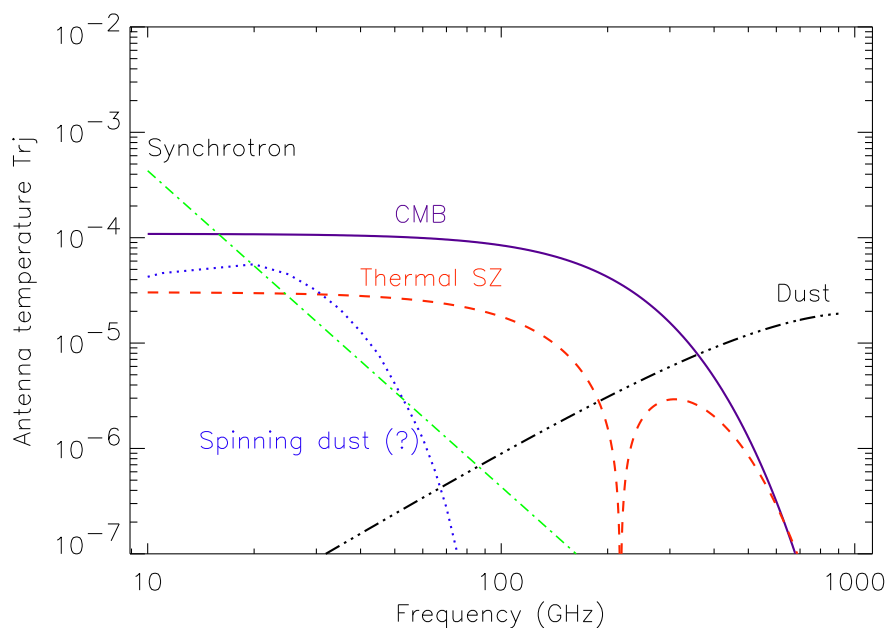


Fig. 2.1: Spectres électromagnétiques des différentes composantes dans les domaines de longueur d'onde millimétriques et submillimétriques.

Nous allons, dans ce chapitre, faire une revue succincte des différents avant-plans attendus dans le domaine de longueur d'onde des observations du CMB. Nous verrons par la suite les méthodes qui permettent de séparer ces différentes composantes dans le but d'obtenir une mesure précise des anisotropies du CMB.

2.1 Les émissions galactiques

2.1.1 Quelques grandeurs utiles

Il nous sera utile, par la suite, de travailler en unité de température de brillance. Il existe deux définitions principales de cette grandeur. La première est dite température Rayleigh-Jeans ou température d'antenne d'une source, elle serait la température thermodynamique de la source si celle-ci suivait la loi d'émission de Rayleigh-Jeans (eq. 2.1)

$$I(\nu) = 2k_B T \nu^2 / c^2 \quad (2.1)$$

Ainsi, une composante d'intensité $I_{\text{comp}}(\nu)$ a pour température Rayleigh-Jeans

$$T_{\text{RJ}} = \frac{I_{\text{comp}}(\nu) \cdot c^2}{2k_B \nu^2} \quad (2.2)$$

La seconde est la température CMB : on peut considérer l'intensité de chaque composante du ciel comme un écart à la valeur moyenne de l'intensité du fond cosmologique (corps noir à $T_0 = 2,726K$), au même titre que les fluctuations de celui-ci. On peut écrire au premier ordre la relation suivante, où ΔT est un écart de température propre au CMB :

$$\Delta I = \frac{\partial B(\nu, T_0)}{\partial T} \cdot \Delta T \quad (2.3)$$

B_ν est la loi du corps noir.

Nous pouvons de cette façon définir la température ΔT_{CMB} d'une composante :

$$\Delta T_{\text{CMB}} = \frac{I_{\text{comp}}(\nu)}{\frac{\partial B(\nu, T_0)}{\partial T}} \quad (2.4)$$

Les températures Rayleigh-Jeans ou CMB d'une source sont évaluées à une fréquence donnée. Elles varient d'une fréquence à l'autre si le spectre d'émission de la source est différent d'un spectre Rayleigh-Jeans ou de CMB respectivement.

2.1.2 La poussière interstellaire

La poussière interstellaire est la principale source "astrophysique" de contamination du CMB aux fréquences supérieures à 100 GHz. L'émission thermique de la poussière a été cartographiée par le satellite IRAS (InfraRed Astronomical Satellite) sur 96 % du ciel, à quatre fréquences, toutes supérieures à 3000 GHz, qui se situent bien au delà des fréquences appropriées pour la mesure des anisotropies du CMB. Le satellite IRAS a été lancé en 1983 à l'initiative des USA, des Pays-bas et du Royaume-uni. La figure 2.2 montre une projection sur l'ensemble du ciel des cartes d'émission

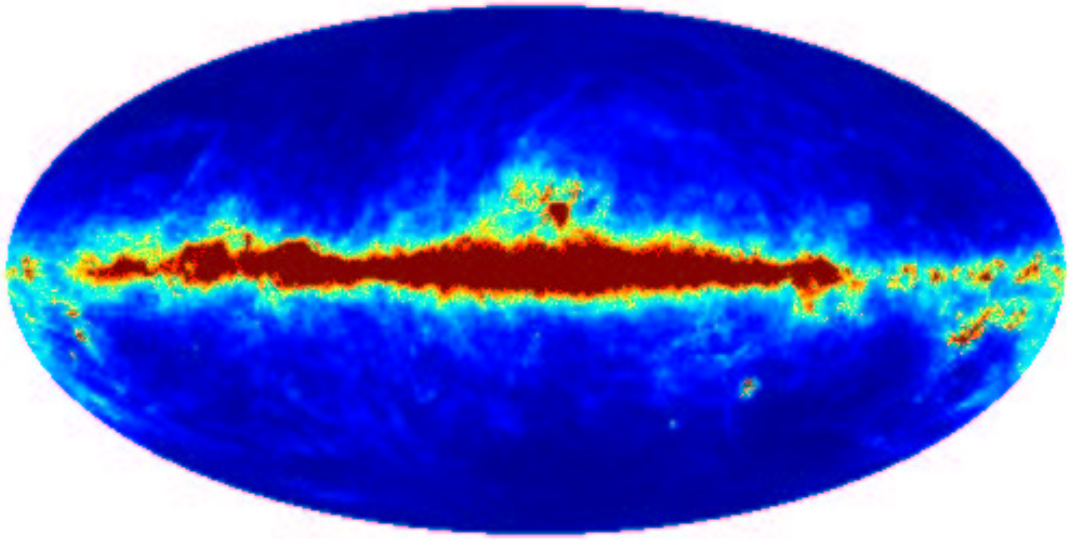


Fig. 2.2: Carte d'émission thermique de la poussière en coordonnées galactiques observée par IRAS à $100 \mu\text{m}$ (3000 GHz). L'intensité de l'émission est d'autant plus forte que l'on se rapproche du plan galactique.

de la poussière obtenues à 3000 GHz . Par ailleurs, l'instrument FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) du satellite COBE a permis d'obtenir des mesures de l'émission de la poussière à des plus grandes longueurs d'onde, voisines de celles du CMB. L'ensemble de ces observations ont permis de contraindre le spectre d'émission ainsi que la distribution spatiale de la poussière.

Ces différentes expériences permettent de prédire par extrapolation le niveau d'émission de la poussière aux fréquences utilisées pour la mesure des anisotropies du CMB. Les propriétés d'émission à ces fréquences vont dépendre de la composition et de la forme des grains de poussière, ainsi que de leurs températures.

Composition de la poussière

Les mesures d'absorption de la poussière dans le domaine ultraviolet, et d'émission dans le domaine infrarouge moyen ont permis d'identifier plusieurs constituants de la poussière dans le milieu interstellaire. En particulier, l'émission diffuse à des longueurs d'ondes inférieures à $15 \mu\text{m}$ environ suggère la présence de molécules PAHs (polycyclic aromatic hydrocarbons). Des petits grains de graphite et/ou de silicates tridimensionnels (appelés VSGs de l'anglais "Very Small Grains") sont en partie responsables de l'émission entre $15 \mu\text{m}$ et $60 \mu\text{m}$ (Desert et al., 1990). La raie d'absorp-

tion à 220 nm de la lumière provenant des étoiles indique la présence de tels grains de poussière de tailles inférieures à 100 Å. En revanche, des études dans le domaine optique suggèrent la présence de grains de grande taille $\gtrsim 15$ nm. Ces grains sont responsables de l'émission de la poussière dans l'infrarouge lointain, à des longueurs d'onde supérieures à 60 μm . La comparaison entre les extinctions dans les domaines UV et optique permet de mettre en évidence la distribution en taille des grains dans le milieu interstellaire (voir par exemple Desert et al. (1990) et Dwek et al. (1997)). Les mesures de la polarisation dans les domaines optique et infrarouge montrent que les grains sont asymétriques. Leurs formes semblent être de type oblate avec un rapport entre petit et grand axes de 2/3 (Hildebrand et Dragovan, 1995).

Distribution spatiale

La distribution spatiale bidimensionnelle (intégrée sur la ligne de visée) de la poussière interstellaire est assez complexe. Elle est constituée de nuages et de structures filamentaires. Les parties les plus diffuses forment ce que l'on appelle les cirrus. L'émission est majoritairement concentrée en direction du plan galactique. Le rapport des intensités entre les régions du centre galactique et des pôles peut atteindre la valeur de 1000. Des cirrus sont toutefois observés dans toutes les régions du ciel. Aucune description statistique des fluctuations sur le ciel de l'émission de la poussière n'est vraiment satisfaisante. Toutefois, il peut être utile de considérer leur spectre de puissance spatial en vue de la mesure des anisotropies du CMB. Le spectre de puissance est relativement bien décrit par une loi de puissance : $P(k) = B k^\alpha$, avec α voisin de 3. Dans les régions "propres" de l'hémisphère nord, Gautier et al. (1992) ont obtenu $\alpha \simeq 2.9$ (voir figure 2.3). La constante de normalisation du spectre B dépend fortement de la région du ciel considéré, et en particulier de la latitude galactique.

L'émission thermique dans l'infrarouge lointain

L'émission de la matière interstellaire entre environ 100 GHz et 3000 GHz est une émission thermique des particules de poussière chauffées par la lumière des étoiles dans le domaine optique. En supposant que la poussière est constituée de silicates et de grains de graphite, Draine et Lee (1984) montrent que les températures devraient être comprises entre 15 et 25 Kelvins. Ils emploient un modèle de diélectriques émettant à des fréquences éloignées de leurs fréquences de résonances (qui se situent dans le domaine optique et infrarouge) afin de prédire la loi d'émission des grains dans le domaine submillimétrique. La loi obtenue est la suivante :

$$I_\nu \propto \nu^2 B_\nu(T_d) \quad (2.5)$$

où $B_\nu(T_d)$ est la loi de corps noir à la température T_d . ν^2 est l'émissivité. Des études plus récentes ont montré que les solides amorphes tels que les verres sont

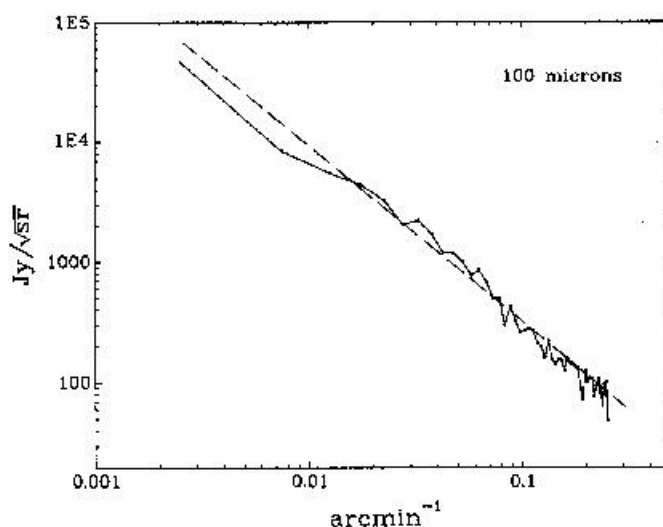


Fig. 2.3: Spectre de puissance de la poussière au niveau du pôle nord déterminé à partir des cartes IRAS. Le meilleur ajustement est obtenu pour un indice spectral $\alpha = 2.9$ (Gautier et al., 1992).

plus précisément caractérisés par un émissivité voisine de $\nu^{1.5}$. Les silicates amorphes ont une contribution probablement importante à l'émission de la poussière dans les domaines de fréquence du CMB. Le modèle le plus simple consiste à considérer une émissivité de la forme ν^β et une température variable avec la position. Le meilleur ajustement sur les mesures de l'instrument FIRAS donne $\beta \simeq 1.7$ (Draine et Lazarian, 1999). Un modèle à plusieurs composantes de poussière semble toutefois plus adapté. D'après Finkbeiner et Schlegel (1999), seulement deux composantes de poussière sont nécessaires pour décrire les observations de FIRAS entre 150 GHz environ et 1000 GHz ainsi que les observations de IRAS. Les indices spectraux et les températures (moyennes) des deux composantes sont $\beta_1 = 1.68$, $\langle T_{d1} \rangle = 9.5$ K et $\beta_2 = 2.78$, $\langle T_{d2} \rangle = 16$ K. Les erreurs sur ces paramètres sont toutefois relativement grandes. En analysant les cartes DIRBE et FIRAS, Lagache et al. (1998) a mis en évidence une composante d'émission de la poussière d'émissivité ν^2 de température 17,5 K associée aux cirrus, et d'une composante plus froide autour de 15 K.

Boulanger et al. (1996) a montré que la partie corrélées de l'émission de la poussière mesurée par FIRAS avec les mesures de la densité colonne de gaz HI, est bien ajustée par une seule composante à la température $T_d=17,5$ K. Ce résultat conforte l'idée que l'émission de la poussière à haute latitude galactique et dans les régions à faible densité colonne de gaz HI est bien approximée par une seule composante.

Les récentes mesures du satellite WMAP dans les bandes de fréquence à 60 et 90 GHz semblent montrer un indice spectral important de l'émission thermique de la poussière au niveau du plan galactique (Bennett et al., 2003a) : $\beta = 2.2 \pm 0.2$. Ce résultat impliquerait une composante froide (autour de 10 K) de grains de silicates.

La contamination des observations du CMB par l'émission thermique de la poussière se révèle extrêmement importante à haute latitude galactique à des fréquences supérieures à 300 GHz environ. Au niveau du plan galactique, l'émission de la poussière est supérieure aux anisotropies du CMB, même aux fréquences voisines de 100 GHz.

L'émission de la poussière en rotation

Aux plus basses fréquences, inférieures à 50 GHz, les observations de l'émission de la poussière sont difficiles. Toutefois, Kogut et al. (1996), entre autres, ont révélé une corrélation anormale des observations entre 15 et 90 GHz avec l'émission de la poussière observée à plus haute fréquence par le satellite IRAS. Cette corrélation est supérieure à celle attendue en considérant une loi d'émission typique pour la poussière. Le niveau de corrélation ne peut pas être complètement expliqué par l'émission free-free, normalement corrélé avec la poussière, que l'on attend à un niveau plus bas. Nous décrivons l'émission free-free dans la partie 2.1.4.

Nous verrons par la suite que, d'après les résultats récents de WMAP (Bennett et al., 2003a), l'effet synchrotron pourrait en partie expliquer cette corrélation. Néanmoins, il existe d'autres explications plus convaincantes à cet effet.

Une hypothèse satisfaisante est la présence d'émission rotationnelle des grains de poussière (voir Draine et Lazarian (1997)). On peut montrer qu'une émission rotationnelle est proportionnelle à la puissance quatrième de la vitesse angulaire. Ainsi seulement les petits grain de poussière auraient une vitesse de rotation suffisante pour produire une émission appréciable. D'après Draine et Lazarian (1997), l'émission produite par une population de grains très petits, récemment mis en évidence, pourrait expliquer l'effet observé entre 15 et 90 GHz. La figure 2.4 montre les différentes mesures de l'excès d'émission et la prédiction des modèles d'émission de la poussière en rotation.

L'émission due à la désexcitation des dipôles magnétiques

L'excès de puissance évoqué dans le paragraphe précédent, peut être en partie (seulement) expliqué par la présence d'éléments magnétiques dans les grains de poussière (Draine et Lazarian, 1999). L'émission dipolaire magnétique pourrait se produire à un niveau appréciable, aux fréquences électromagnétiques qui correspondent aux fréquences de précession des électrons dans le champ magnétique ambiant, à condition que les grains de poussières aient des propriétés magnétiques (dues à leur composition) adéquates.

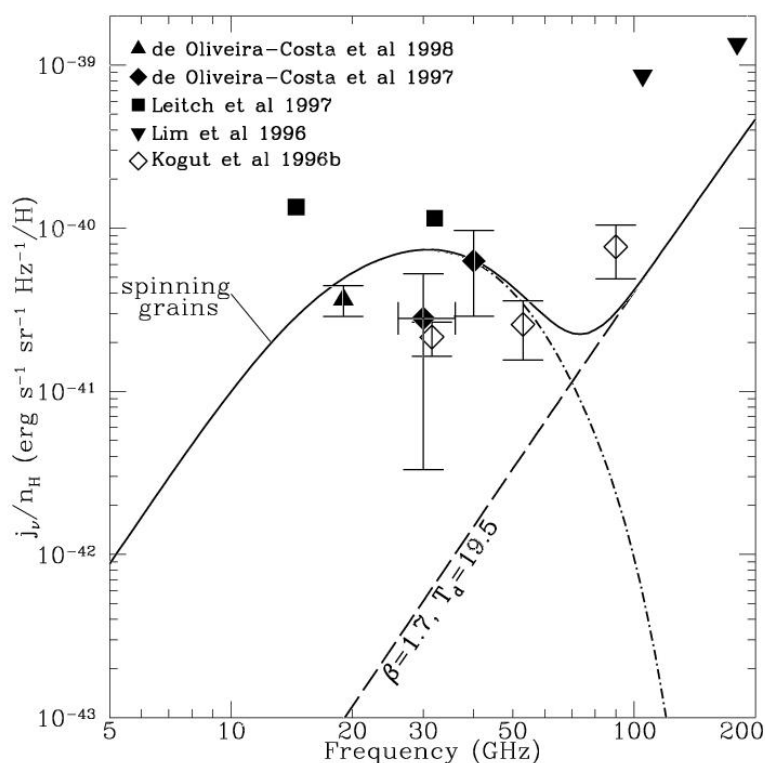


Fig. 2.4: Prédications de l'émission, en fonction de la fréquence, des grains de poussière en rotation (tirés et points alternés) et extrapolation à basse fréquence de l'émission thermique due à la désexcitation dipolaire des grains de poussière (tirés). La somme des deux prédictions est en trait plein. Les différents points de mesure sont représentés.

2.1.3 L'émission synchrotron

L'émission synchrotron résulte du mouvement giratoire des électrons ultrarelativistes dans le champ magnétique galactique. Il s'agit d'une source d'émission importante dans les observations des anisotropies du CMB aux plus basses fréquences électromagnétiques des observations, autour de 30 GHz. L'émission synchrotron a été cartographiée sur la totalité du ciel à 408 MHz (Haslam et al., 1982) à la résolution de 0.85° . Aussi, des mesures à large couverture sur le ciel à 1420 MHz (Reich et Reich, 1986) et 2326 MHz (Jonas et al., 1998) ont été effectuées à meilleure résolution angulaire. La figure 2.5 montre la totalité du ciel observé à 408 MHz.

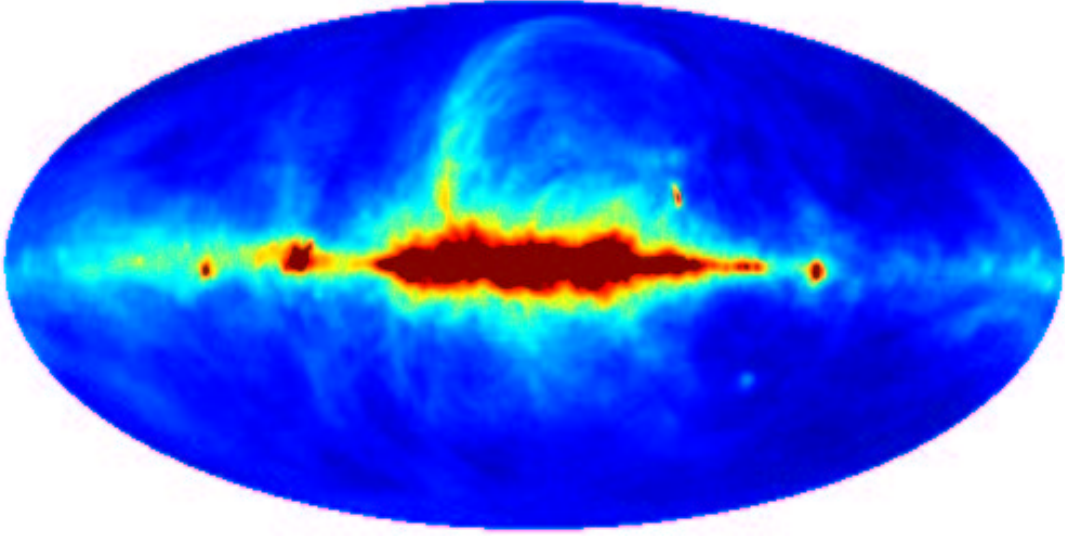


Fig. 2.5: Carte d'émission synchrotron à 408 MHz. L'intensité de l'émission croît à mesure que l'on se rapproche du plan de la Galaxie.

Principes

Les électrons se déplaçant à grande vitesse dans la Galaxie sont accélérés dans le champ magnétique ambiant, suivant leur orientation par rapport à ce dernier. Ces électrons vont perdre de l'énergie en émettant un rayonnement conséquent sur une gamme importante de fréquences. Soit E l'énergie d'un électron et B l'intensité du champ magnétique, le spectre d'émission synchrotron est maximal à la fréquence $\nu_m = 16.08(B_{\text{eff}}/\mu\text{G})(E/\text{GeV})^2$ MHz, et possède une longue queue à plus haute fréquence. Par conséquent, le spectre d'émission synchrotron dans la Galaxie dépend de la distribution en énergie des électrons ultrarelativistes. Soit N_0 la densité d'énergie des électrons. Le spectre d'énergie est décrit par une loi de puissance : $dN/dE = N_0 E^{-p}$. La luminosité à la fréquence ν est alors donnée par :

$$I(\nu) \propto LN_0 B^{(p+1)/2} \nu^{-(p-1)/2} \quad (2.6)$$

où L est la profondeur d'émission et B l'intensité du champ magnétique.

Aux plus basses fréquences, l'effet de réabsorption des photons émis est très important et la loi d'émission précédente n'est plus valable. Son domaine de validité se situe dans les longueurs d'onde radio, centimétriques et millimétriques.

Mécanismes conduisant à l'émission synchrotron

Les électrons cosmiques ultrarelativistes trouvent leur origine dans les explosions de supernovae. Après leurs émissions, ces électrons sont diffusés dans la matière résiduelle des supernovae en expansion. Les structures sont formées en raison des collisions avec le milieu non-uniforme. L'indice de puissance p du spectre en énergie des électrons varie d'une supernova à l'autre, mais aussi croît en fonction de son âge en raison de la perte d'énergie due à la radiation.

Le champ magnétique ambiant dans la Galaxie est amplifié dans les régions de compression et varie en intensité et direction. La conséquence est la présence de structures spatiales allongées visibles sur les cartes d'émission synchrotron dans une grande gamme d'échelles angulaires. Une grande partie des électrons cosmiques dans notre galaxie quittent les restes de la supernova d'origine, et perdent de l'énergie pendant leur voyage en parcourant de grandes distances dans la Galaxie. Ceci conduit à une émission synchrotron plus diffuse.

Distribution spatiale

Les structures de l'émission synchrotron sont, comme pour la poussière, concentrées au niveau du plan galactique. Les cartes d'émission montrent des structures très diffuses et laissent apparaître de larges boucles allongées décrivant des cercles sur le ciel de diamètre variant entre 60° et 120° . Certaines structures en anneau plus diffuses à haute latitude galactique sont attribués à des restes de supernovae anciens (les spectres en énergie des électrons sont plus raides dans ces régions).

Le spectre de puissance de l'émission synchrotron a fait l'objet de plusieurs études, le but principal étant de déterminer le niveau de contamination du spectre de puissance des anisotropies du CMB. Le spectre spatial C_l de l'émission synchrotron est relativement bien décrit par une (ou plusieurs) loi de puissance :

$$C_l \propto l^{-\beta} \quad (2.7)$$

En analysant les cartes à 408 MHz et à 1420 MHz, Tegmark et Efstathiou (1996) et Bouchet et Gispert (1999) respectivement ont mesuré un indice spectral moyen $\beta \simeq 3$ jusqu'au multipôle $l \simeq 200$ qui correspond à la limite de résolution angulaire des cartes. Des mesures à meilleure résolution sur des petits domaines du ciel ($10^\circ \times 10^\circ$) au niveau du plan galactique et à latitude galactique moyenne ont été réalisées. Ces observations aux fréquences 1.4, 2.4 et 2.7 GHz (Uyaniker et al., 1999; Duncan et al., 1997; Duncan et al., 1999), ont permis d'obtenir les mesures suivantes : $\beta \simeq 2$ en moyenne dans le plan galactique et grossièrement $\beta \simeq 1$ à latitude galactique moyenne. Le domaine angulaire de validité de cette étude est $100 < l < 800$ (Baccigalupi et al., 2000).

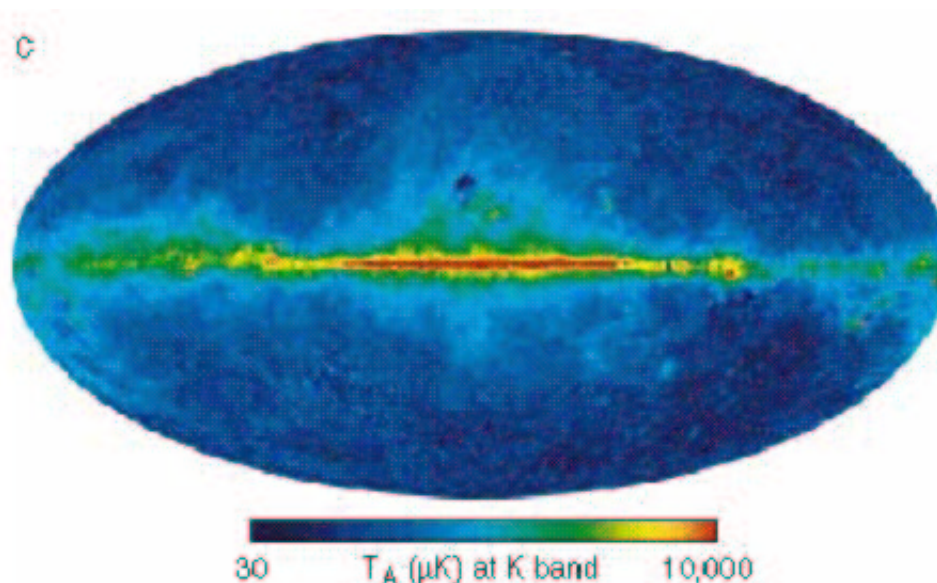


Fig. 2.6: Carte d'émission synchrotron obtenue après séparation de composantes dans les cartes d'observation de WMAP.

Spectre d'émission mesuré à basse fréquence

L'indice α , défini comme l'opposé de l'indice spectral de l'émission synchrotron, est donné par $\alpha = (p - 1)/2$, d'après l'équation 2.6. Il peut être mesuré assez précisément aux fréquences inférieures à 1 GHz. Entre 38 et 1420 MHz, Lasenby (1995) a obtenu une valeur moyenne sur le ciel de $\alpha = 0.7$. Des variations de l'ordre de 0.3 ont été mises en évidence en fonction de la région du ciel observée dans l'hémisphère nord galactique. A plus haute fréquence, l'observation de l'effet synchrotron est plus difficile. On observe néanmoins une augmentation de α dans les régions intenses formées par les boucles situées à haute latitude galactique. En théorie, on attend une valeur de α supérieure à la moyenne dans les régions les plus anciennes, car naturellement les électrons de plus haute énergie perdent plus rapidement leur énergie que les électrons à plus basse énergie. Une analyse des cartes à 408 et 1420 MHz donne des valeurs de α comprises entre 0.8 et 1.2 dans les régions du pôle nord galactique (Davies et al., 1996). Sur des échelles de quelques degrés, entre 408 MHz et 5 GHz, l'indice α mesuré est de l'ordre de 1. L'analyse des observations aux fréquences : 10, 15 et 33 GHz indiquent également une valeur voisine de 1 (voir par exemple Smoot (1999)).

L'émission synchrotron vue par WMAP

Les observations par le satellite WMAP dans les bandes à 23, 33 et 41 GHz permettent de cartographier l'émission synchrotron sur la totalité du ciel dans des domaines de fréquences peu explorés. La comparaison de ces observations avec la carte à 408 MHz permet une mesure de l'indice spectral α . La valeur obtenue est relativement faible : $\alpha \simeq 0.5$ au niveau du plan galactique. En revanche, dans les régions externes l'indice spectral apparaît plus important. Les régions du ciel observées à des fréquences de l'ordre du GHz, qui possèdent un indice spectral voisin de 1, sont naturellement très faibles dans les cartes de WMAP (régions extérieures au plan galactique). La conséquence serait que l'émission synchrotron vue par WMAP serait davantage un traceur de régions de formation d'étoiles comparé aux mesures à plus basse fréquence, car les régions sondées sont plus jeunes. Ainsi, la distribution spatiale de l'émission synchrotron aux fréquences de WMAP pourrait être corrélée avec d'autres traceurs de formation d'étoiles comme l'émission thermique de la poussière. La figure 2.6 montre la carte d'émission synchrotron obtenue après séparation de composantes à partir des cartes WMAP. Un autre résultat de l'expérience WMAP est la mesure de l'indice spectral α entre 23 et 41 GHz. Celui-ci semble plus important qu'à plus basse fréquence.

Il n'est pas exclu que la carte d'émission synchrotron observée par WMAP contienne une contribution non négligeable par l'émission free-free ou de la poussière.

2.1.4 L'émission Bremsstrahlung

Le rayonnement Bremsstrahlung, ou free-free, des électrons est un processus bien compris en physique, mais qui est assez mal identifié dans les observations, car il est toujours sous-dominant. Toutefois, dans les observations du CMB, aux fréquences proches de 50 GHz, il pourrait avoir une contribution significative.

Principe

L'effet Bremsstrahlung galactique est le rayonnement de freinage des électrons libres dans le champ créé par les ions. Ces électrons sont produits par le chauffage du gaz interstellaire en raison du champ de radiation ultraviolet des étoiles. Le spectre d'émission free-free est approximé par $I(\nu) \propto \nu^\beta$ avec $\beta = -0.15$ à haute fréquence ($\nu > 10$ GHz) et $\beta = 0$ à plus basse fréquence en raison de l'auto-absorption dans le domaine optique.

Corrélation avec l'émission H_α

L'émission H_α , correspondant à la transition électronique de l'Hydrogène, $n = 3 \rightarrow 2$, est un excellent traceur de free-free car ils sont tous les deux émis dans le milieu ionisé chaud ou "WIM" (Warm Ionised Medium). Ils sont proportionnels, au premier ordre, au carré de la densité électronique intégré sur la ligne de visée, que l'on note EM (Emission Measure) :

$$EM = \int n_e^2 dl \quad (2.8)$$

Le rapport entre les intensités d'émission free-free et H_α pour $\nu > 10$ GHz est approché par la relation suivante :

$$\frac{I_{ff}}{I_{H_\alpha}} \propto \nu^{0.14} T_4^{0.527} 10^{0.029/T_4} \quad (2.9)$$

où T_4 est la température des électrons en unité de 10^4 K (Valls-Gabaud, 1998).

Finkbeiner (2003) a récemment réalisé une carte d'émission H_α sur l'ensemble du ciel en utilisant différentes observations indépendantes comme le WHAM (Wisconsin H-Alpha Mapper), le VTSS (Virginia Spectral-Line Survey) et le sondage SHASSA (Southern H-Alpha Sky Survey Atlas). La figure 2.7 montre la carte obtenue. Cette

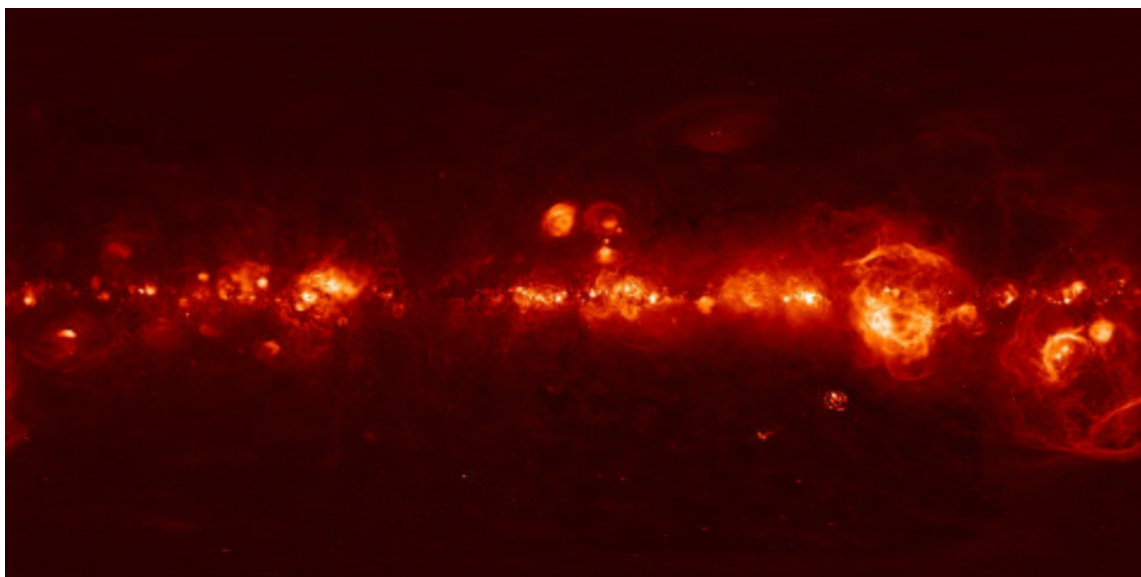


Fig. 2.7: Compilation de cartes d'émission H_α sur la totalité du ciel en coordonnées galactiques, réalisée par Finkbeiner (Finkbeiner, 2003).

carte, extrapolée en utilisant la relation 2.9, peut être utilisée comme une prédiction

approximative de l'émission free-free dans le but de réaliser des simulations d'observations dans le domaine millimétrique ou encore de réaliser des mesures de corrélations avec les cartes existantes. Il existe néanmoins plusieurs sources d'erreurs difficiles à quantifier dans cette approche. Par exemple, l'émission H_α est diffusée par la poussière d'une manière différente de l'émission free-free, ou encore, la température T_e dépend de la région d'émission dans la galaxie et varie le long de la ligne de visée.

2.2 Les composantes extragalactiques

2.2.1 Les sources extragalactiques

De nombreuses sources extragalactiques émettent significativement dans le domaine de longueur d'onde du CMB. Elles comprennent tout d'abord les sources radio telles les radio-galaxies, les quasars ou les blazars. Les sources radio contribuent essentiellement aux plus basses fréquences dans les observations du CMB. L'expérience WMAP en particulier a détecté environ 200 sources. Par ailleurs, une partie importante des sources extragalactiques sont des sources infrarouges, comme par exemple les galaxies à flambées de formation d'étoiles.

Le niveau de contamination par les sources radio aux fréquences d'observations du CMB est prédit en extrapolant leurs émissions observées à des fréquences voisines de 4 GHz (Toffolatti et al., 1998). Une des difficultés est que chaque source possède un spectre d'émission propre, qui diffère d'une source à l'autre. Toutefois, une tendance "plate" : $I(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$, avec $\alpha \simeq 0$ est observée à des fréquences inférieures à 100 GHz. La prédiction du niveau d'émission des sources infrarouge aux fréquences d'observation du CMB est rendue difficile, d'une part en raison de l'écart en fréquence qui existe avec les observations IRAS, et d'autre part en raison de l'incertitude sur les lois d'émission des sources (qui dépendent de nombreux paramètres). Bouchet et al. (1999) a calculé une limite supérieure sur l'amplitude des sources non résolues dans les observations en supposant la loi d'émission $\nu^{0.7} B_\nu(T = 13,8 \text{ K})$. L'ensemble des sources non résolues dans le domaine infrarouge constitue ce que l'on appelle le fond de rayonnement infrarouge ou "CIB" (cosmic infrared background). Il a été détecté pour la première fois par Puget et al. (1996) en analysant les cartes COBE/FIRAS. Sa présence a été ensuite confirmée à différentes fréquences d'observation. Les fluctuations du CIB ont été observées à $170 \mu\text{m}$ dans le champ FIRBACK (Lagache et Puget, 2000) et à 90 et $170 \mu\text{m}$ dans le "Lockman hole" (Matsuhara et al., 2000). En analysant les cartes ISSA-IRAS, Miville-Deschêne et al. (2002) a mesuré un excès du spectre de puissance à 60 et $100 \mu\text{m}$ dans des régions à faible émission par les cirrus. Cette excès, dont l'amplitude est indépendante de la latitude galactique, est attribué aux fluctuations du CIB.

Ces différentes études des sources radio et infrarouge ont montré la nécessité de soustraire (ou de couper) les sources ponctuelles résolues sur les cartes du futur satellite

Planck (en utilisant par exemple l'information fournie par les cartes aux différentes fréquences). La contribution du CIB aux fréquences d'observation du CMB (100 - 200 GHz) devrait être supérieure à l'émission de la poussière à haute latitude galactique (le spectre d'émission du CIB étant plus "froid" que celui de la poussière (Miville-Deschênes et al., 2002)). Le CIB constitue donc un contaminant potentiel pour la mesure des anisotropies du CMB avec Planck.

Le problème majeur pour la soustraction de ces sources extragalactiques par les méthodes de séparation de composantes est que leur émission n'est pas décrite par le produit d'une fonction de la position (décrivant leur distribution spatiale) et d'une fonction de la fréquence.

2.2.2 L'effet Sunyaev-Zel'dovich

L'effet Sunyaev Zel'dovich (SZ) est le résultat de l'interaction des photons du CMB à 3K avec les électrons libres et en mouvement des amas de galaxies (Sunyaev et Zel'dovich, 1970). Le processus d'interaction est la diffusion Compton inverse dont la section efficace, extrêmement faible à ces échelles d'énergie, est $\sigma_T \simeq 6.65 \times 10^{-24}$. La profondeur optique d'un amas de galaxie vis à vis des photons du CMB est $\tau \simeq n_e \sigma_T R \simeq 10^{-2}$, où n_e est la densité électronique et R le rayon caractéristique d'un amas. Cette interaction va être à l'origine, dans les observations du CMB, de petites anisotropies spatiales supplémentaires dans la direction des amas. Il existe deux effet SZ. Le premier est dû à l'agitation thermique des électrons (qui sont à la température de l'ordre de 10^6 K), le second est dû au mouvement global des amas par rapport au flot de Hubble.

La mesure des effets SZ pour le sondage des amas de galaxies présente un grand intérêt en cosmologie. En particulier, la mesure de la distribution spatiale et de la température des amas nous renseigne sur un certain nombre de paramètres cosmologiques mal contraints par le CMB.

L'effet SZ thermique

La température du gaz inter-galactique dans les amas peut être calculée simplement en considérant un équilibre hydrostatique dans le champ gravitationnel de l'amas. Etant donné la masse M d'un amas, de l'ordre de $10^{14} M_\odot$, et son rayon de viriel R_v (au delà de ce rayon, il n'y a plus équilibre), de l'ordre du Mpc, la température des électrons est estimée à partir de la relation suivante :

$$T_e \approx \frac{GMm_p}{2k_B R_v} \approx 1 - 10 \text{ keV} \quad (2.10)$$

A cette température, l'émission thermique du gaz est maximale dans le domaine des X.

Un traitement relativiste de l'effet SZ thermique peut être effectué, mais pour la plupart des amas, le traitement classique est suffisant. Nous nous plaçons donc dans la limite classique. L'équation de Kompaneets (Kompaneets, 1957) décrit la variation d'une distribution en énergie de photons $n(\nu)$ par un processus de diffusion. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} x_e^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x_e} + n + n^2 \right) \quad (2.11)$$

où $x_e = h\nu/k_B T_e$ et :

$$y = \frac{k_B T_e ct}{m_e c^2 \lambda_e} \quad (2.12)$$

y est une mesure sans dimension du temps passé dans la distribution d'électron. λ est la longueur d'interaction. Concernant un champ de radiation passant à travers un nuage d'électron, le paramètre y , habituellement appelé paramètre de comptonisation, s'écrit :

$$y = \int n_e \sigma_T dl \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad (2.13)$$

La distribution des photons incidents est la distribution de corps noir $n_0 = (e^x - 1)^{-1}$ avec $x = h\nu/k_B T_{\text{rad}}$. La solution statique de l'équation de Kompaneets (obtenue à l'équilibre au bout d'un temps infini) est $n = (e^{x_e} - 1)^{-1}$. Comme l'épaisseur optique d'un amas est très faible, les valeurs de paramètres y caractéristiques sont très inférieures à 1. Ainsi, l'effet produit au bout du temps de traversée d'un amas est un gain d'énergie des photons est une petite distorsion de spectre de corps noir. En faisant les approximations : $\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\Delta n}{y}$, $\frac{\partial n}{\partial x_e} \ll n$, n^2 on peut calculer la variation de l'intensité des photon après traversée de l'amas (sachant que $\Delta I \propto x^3 \Delta n$) :

$$\frac{\Delta I(\nu)}{I_0} = \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[\frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1} - 4 \right] \quad (2.14)$$

avec $I_0 = 2(k_B T_{\text{rad}})^3 / (hc)^2$.

On peut noter les caractéristiques suivantes :

- Dans la limite classique, la forme de la loi d'émission de l'effet SZ thermique est indépendant des caractéristiques de l'amas. Dans le cas relativiste ($k_B T_e \approx 10$ keV), la loi d'émission dépend de la température des électrons (Challinor et Lasenby, 1998).
- La loi d'émission SZ thermique est négative à basse fréquence (rappelons qu'il s'agit d'une différence de spectre) et positive à haute fréquence. Comme le montre la figure 2.8, elle possède un minimum, un zéro et un maximum pour les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x_{\min} = 2.26 & \longrightarrow & \nu = 130\text{GHz} \\ x_{\text{zero}} = 3.83 & \longrightarrow & \nu = 217\text{GHz} \\ x_{\max} = 6.51 & \longrightarrow & \nu = 365\text{GHz} \end{cases} \quad (2.15)$$

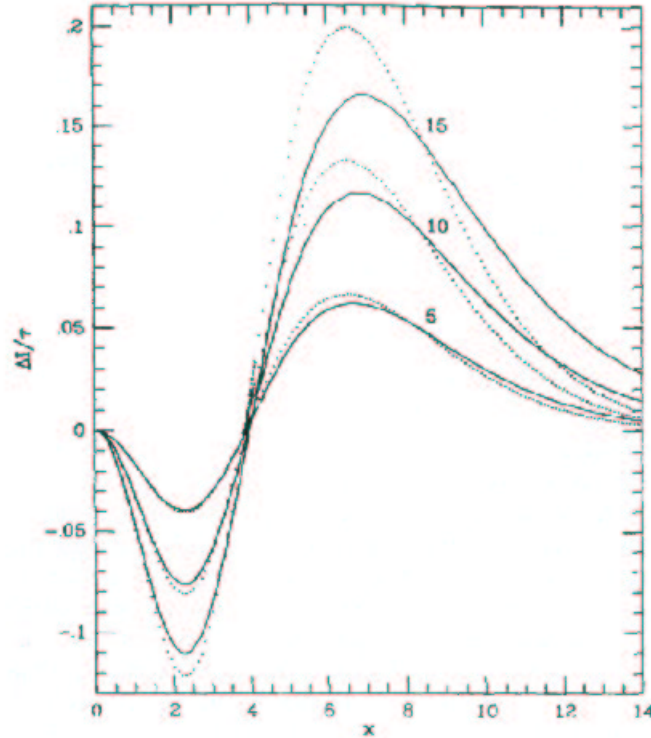


Fig. 2.8: Spectre électromagnétique de l'effet SZ thermique par unité de profondeur optique : $\frac{\Delta I(\nu)}{\tau}$, calculé pour différentes valeurs de température du gaz intra-amas. Les lignes pleines correspondent aux résultats du calcul relativiste, les lignes pointillés à ceux du calcul non-relativiste.

Les mesure typiques de paramètre de comptonisation y au centre des amas de galaxie brillants donnent des valeurs de l'ordre de 10^{-5} . Sachant que la taille angulaire des amas est de quelques minutes d'arc, il s'agit d'un effet relativement faible. La figure 2.9 montre une carte simulée d'effet SZ thermique pour une cosmologie standard.

L'effet SZ cinétique

Dans le référentiel propre d'un amas en mouvement par rapport au flot de Hubble, le CMB n'est pas isotrope. En raison de la diffusion Compton inverse par les électrons libres, le CMB va avoir tendance à s'uniformiser. Pour un observateur extérieur, au repos par rapport au référentiel du CMB, le rayonnement montre une variation d'intensité dans la direction de l'amas dont l'amplitude dépend de la vitesse radiale. La variation d'intensité est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\Delta I(\nu)}{I_0} = -\frac{v_r}{c} \tau \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (2.16)$$

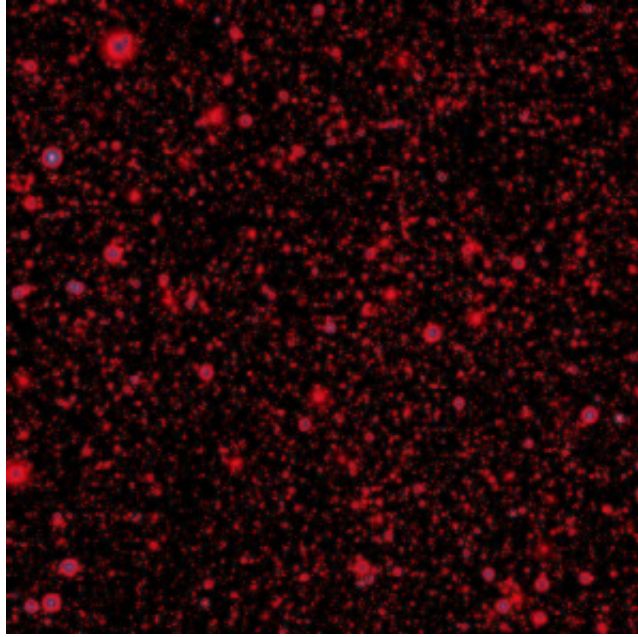


Fig. 2.9: Carte simulée de paramètre y sur une portion du ciel de taille $12.5^\circ \times 12.5^\circ$ pour une cosmologie standard (d'après (Delabrouille et al., 2002b)).

où τ est la profondeur optique de l'amas. En unité de température CMB, cette relation devient :

$$\frac{\Delta T_{\text{CMB}}(\nu)}{T_0} = -\frac{v_r}{c} \tau \quad (2.17)$$

Ainsi, l'amplitude de cet effet pour des vitesses caractéristiques des amas de galaxies, est relativement faible. En moyenne, il est environ 10 fois plus faible que l'effet thermique. Un excès de température sera observé si l'amas se rapproche de nous, et un défaut dans la cas contraire.

On peut remarquer que la forme du spectre électromagnétique de l'effet SZ cinétique est indépendant de l'amas considéré, tout comme pour l'effet SZ thermique. L'équation 2.17 montre que le spectre est identique à celui des anisotropies du CMB, rendant l'effet SZ cinétique très difficile à isoler par les méthodes de séparation de composantes. La figure 2.10 montre une carte simulée de cet effet.

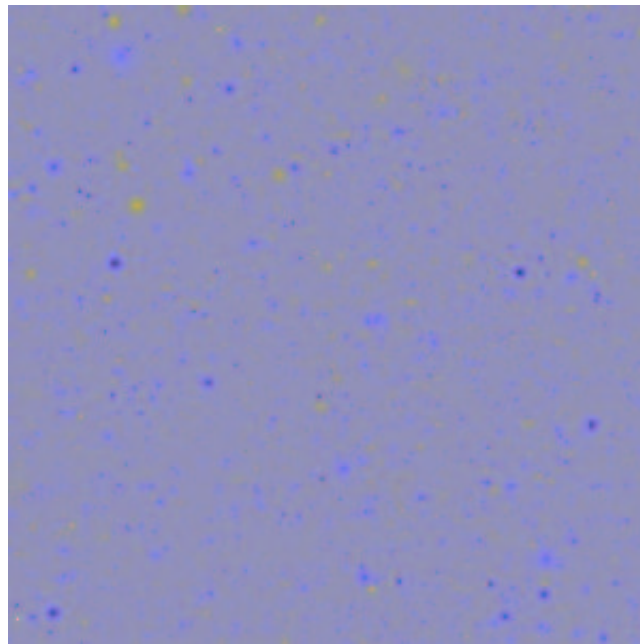


Fig. 2.10: Carte simulée d'effet SZ cinétique sur une portion du ciel de taille $12.5^\circ \times 12.5^\circ$ pour une cosmologie standard (d'après (Delabrouille et al., 2002b)).

3. MODÉLISATION D'OBSERVATIONS DU CMB

Nous avons vu dans le premier chapitre les contraintes apportées par les mesures des anisotropies du CMB sur les paramètres cosmologiques et l'intérêt de leur mesure quant à notre compréhension de l'Univers. Dans le deuxième chapitre, nous avons décrit les composantes d'origine astrophysique qui viennent s'ajouter dans les observations, aux anisotropies du CMB. Leur soustraction, nécessaire pour une mesure précise du signal cosmologique, requiert un travail d'analyse important et périlleux. En ce qui concerne la plupart des expériences actuelles, et en particulier les expériences ballons et au sol, les sources dominantes de contamination des données sont d'une part les émissions astrophysiques, mais aussi et surtout le bruit dont l'origine est principalement instrumentale. Les fluctuations des émissions atmosphériques peuvent aussi être une source de contamination importante. Nous allons, dans cette partie, introduire quelques aspects instrumentaux qu'il est nécessaire de prendre en compte dans la chaîne du traitement des données. Pour cela, nous décrirons succinctement le satellite Planck dont l'objectif principal est la mesure des anisotropies du CMB. La préparation à l'analyse des données de Planck a fait l'objet d'une partie importante de mon travail de thèse. Par la suite, dans le but de poser un cadre pour le traitement des données pour la mesure en particulier du spectre de puissance du signal cosmologique, nous allons construire un modèle des observations qui prend en compte l'émission des diverses composantes ainsi que les effets instrumentaux. Ce modèle sera par la suite utilisé pour appliquer les méthodes de séparation de composantes et la méthode d'estimation spectrale en aveugle (nous verrons la signification du terme "en aveugle") que j'ai contribué à développer au cours de ma thèse.

3.1 *La mission Planck*

Le satellite Planck (Lamarre et al., 2000; Mandolesi et al., 2000) de l'agence spatiale Européenne ¹ sera lancé en 2007 par Ariane V. Il aura pour objectif la cartographie des anisotropies du CMB sur la totalité du ciel ainsi que la mesure de leur polarisation. Sa grande gamme de fréquences d'observations (9 au total) devrait permettre de soustraire efficacement les différentes émissions d'avant-plan. Les anisotropies du CMB seront mesurées avec une précision inégalée ($\Delta T/T \simeq 10^{-6}$), jusqu'à des échelles angulaires de l'ordre de 5 minutes d'arc. La figure 3.1 est une vue d'artiste du satellite Planck.

3.1.1 *Les objectifs scientifiques*

L'objectif principal de la mission Planck est la mesure précise des paramètres cosmologiques fondamentaux à partir de la mesure du spectre de puissance des aniso-

¹ avec une contribution de la Nasa

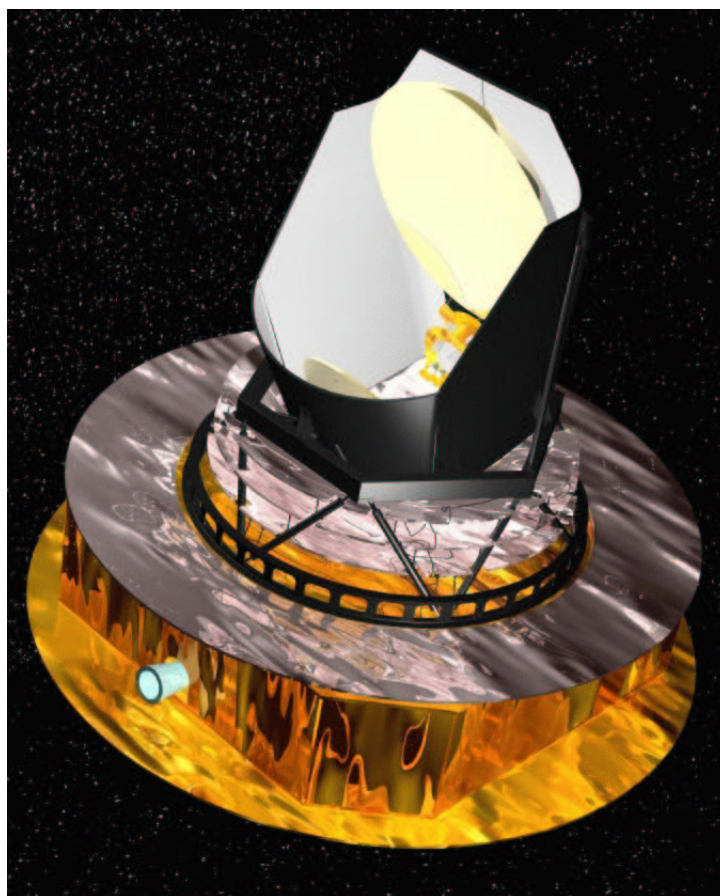


Fig. 3.1: Vue d'artiste du satellite Planck.

tropies du CMB, et des spectres de puissance de leur polarisation. Les paramètres les plus connus, qui font actuellement l'objet de nombreuses recherches, sont en particulier les densités de matière baryonique ou non-baryonique, la constante cosmologique, le paramètre de Hubble, ou encore le contenu en neutrinos de l'Univers. Ces paramètres devraient être mesurés avec une précision meilleure que le pour cent, en raison de la remarquable sensibilité des instruments (voir table 3.1). Planck devrait aussi permettre de contraindre fortement les modèles d'inflation, en particulier grâce à la mesure de la polarisation. La mesure des modes de polarisation pseudo-scalaires (modes B) nous permettra de placer des contraintes sur les ondes gravitationnelles primordiales dans l'Univers.

Pour une meilleure mesure des anisotropies du CMB, Planck observera le ciel à 9 fréquences différentes entre 30 et 857 GHz. Cela permettra par ailleurs de couvrir plusieurs champs en astrophysique, grâce à :

- Des cartes complètes des émissions d'avant plan galactiques sur la totalité de la sphère céleste, à des fréquences jusqu'à lors peu explorées.

Tab. 3.1: Précision estimée de mesure des principaux paramètres cosmologiques avec Planck HFI. Les valeurs indiquées sont les intervalles de confiance à 1 sigma en supposant un Univers plat.

Paramètre	$\delta(\Omega_b h^2)/(\Omega_b h^2)$	$\delta(\Omega_c h^2)/(\Omega_c h^2)$	$\delta(\Omega_\Lambda h^2)$	δr	δn_s	δn_t
Planck HFI	0.0068	0.0063	0.0049	0.49	0.005	0.57

- La détection d'environ 10000 amas de galaxies à travers l'effet SZ. Ces données seront utilisées pour étudier l'évolution cosmologique des amas à des redshifts de l'ordre de 1, l'évolution des grandes échelles dans l'Univers, et les vitesses particulières des amas.
- La production de catalogues de quelques milliers de sources ponctuelles. Planck devrait permettre de produire des catalogues de galaxies à flambées de formations d'étoiles, noyaux actifs de galaxies, radio-galaxies, quasars, blazars, et de contraindre le spectre de certaines sources radio.
- La mesure des fluctuations du fond infrarouge.

3.1.2 La stratégie d'observation

Le satellite Planck sera placé au point de Lagrange L2 du système Terre-Soleil, situé à 1,5 millions de kilomètres de la Terre dans la direction opposée au Soleil. Ce point d'équilibre (instable) a été choisi afin de minimiser les variations de température des miroirs et du plan focal provoquées par la lumière du soleil, ainsi que les effets de lobes lointains. La stratégie d'observation de Planck consiste à balayer le ciel en faisant tourner le satellite sur lui-même à la fréquence de 1 tour par minute. L'axe de rotation du satellite sera voisin de la direction satellite-Terre-Soleil. La direction de pointage du télescope sera inclinée de 70 degrés par rapport à l'axe de rotation. Des "quasi" grands cercles sur le ciel seront ainsi réalisés. La position de l'axe de rotation du satellite autour de lui-même (centre des grands cercles) variera au cours du temps de manière à suivre le mouvement de l'axe Terre-Soleil. Cette variation ne sera pas effectuée continuellement mais par petits sauts de deux minutes d'arcs et demi toutes les heures. Soixante tours seront effectués par cercle sur le ciel. La durée de la mission autour du point L2 sera de 18 mois permettant de couvrir par trois fois la totalité du ciel. La figure 3.2 est une illustration de la stratégie de balayage du ciel par Planck.

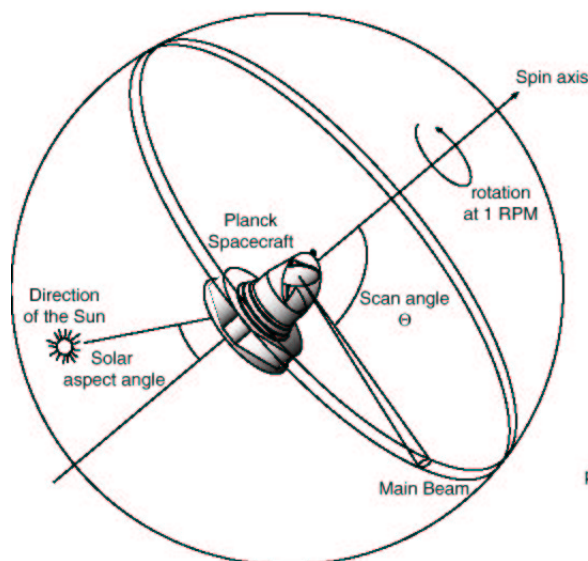


Fig. 3.2: Stratégie d'observation de Planck

3.1.3 Les instruments de Planck

La charge utile du satellite Planck est composée d'un télescope de type Grégorien hors-axe et d'un plan focal où se trouvent les deux instruments. Le miroir primaire possède un diamètre de 1,5 mètres permettant une bonne résolution angulaire. Au niveau du plan focal, la lumière dans le domaine de fréquence du CMB est collectée par des cornets corrugués couplés à des guides d'onde permettant de réaliser une partie de la sélection en fréquence.

Les deux instruments de Planck sont LFI, l'instrument basse fréquence ("Low Frequency instrument") et HFI, l'instrument haute fréquence ("High Frequency instrument"). La figure 3.3 montre les instruments de Planck situés au niveau du plan focal. LFI est constitué de 56 antennes HEMT ("High electron mobility transistor") qui observeront le ciel à 3 fréquences différentes : 30, 44 et 70 GHz et seront sensibles à la polarisation du rayonnement. Les récepteurs radio seront refroidis à la température de 20 K afin de réduire le bruit des radiomètres. La résolution angulaire des détecteurs de LFI est, par ordre croissant de fréquence : 33, 23 et 14 minutes d'arc.

L'instrument HFI, qui apportera les mesures principales des anisotropies du CMB, est constitué de 48 bolomètres qui observeront le ciel aux fréquences suivantes : 100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz. Huit bolomètres pour chaque fréquence à 143, 217 et 353 GHz ainsi que quatre à 100 GHz sont de type "PSB" (Polarisation Sensitive Bolometers), sensibles à la polarisation. Les bolomètres à 143, 217, 353 GHz restants et à 545

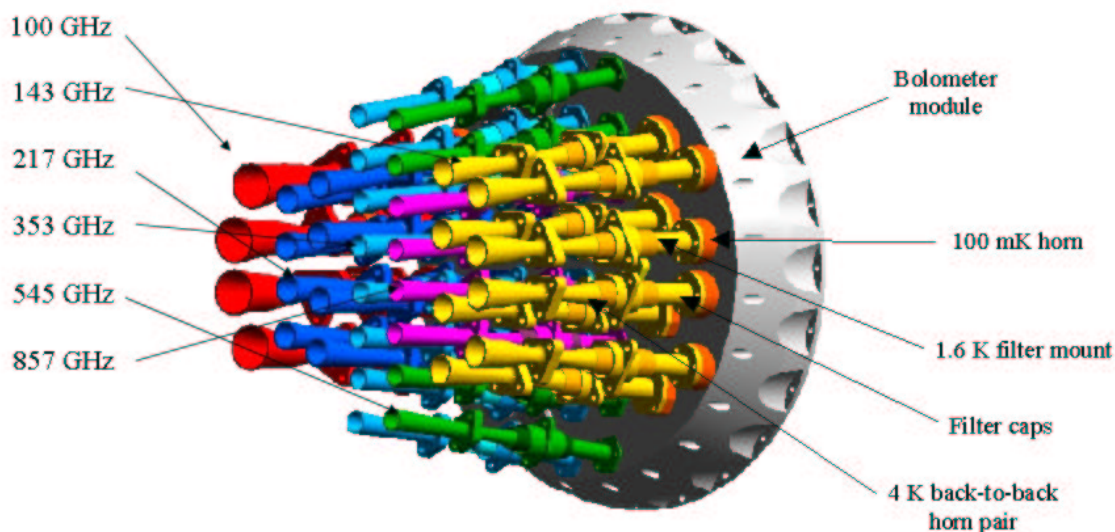


Fig. 3.3: Plan focal de Planck

et 857 GHz sont de type “toile d’araignée”. Le bruit intrinsèque des bolomètres sera faible comparé au bruit de photons du CMB grâce à un système de refroidissement permettant d’atteindre et de stabiliser la température des bolomètres autour de 100 mK. Le système de refroidissement est un cryostat fonctionnant par dilution ^3He - ^4He . La détente de Joule-Thompson du mélange permet de maintenir une température de 1,6 K autour de l’étage à 100 mK, assurant son isolation. Un étage à 4 K puis à 20 K viennent se superposer. La résolution angulaire des détecteurs de Planck HFI varie de 5 minutes d’arc pour les détecteurs aux plus hautes fréquences, jusqu’à 9.2 minutes d’arc à 100 GHz. Les performances des détecteurs des instruments de LFI et HFI sont résumées dans la table 3.2.

3.2 *Modèle des observations dans le domaine millimétrique*

Nous allons, dans cette partie, établir un modèle des observations par des expériences telles que les expériences Boomerang, Maxima, Archeops, WMAP et Planck. Ce modèle servira de cadre aux méthodes d’estimation du spectre de puissance du CMB et des cartes de composantes.

Tab. 3.2: Performances des détecteurs du satellite Planck. Les sensibilités données sont par élément de résolution pour 12 mois d'observation.

	LFI			HFI					
Fréquence centrale (GHz)	30	44	70	100	143	217	353	545	857
Nombre de détecteurs non-polarisés	-	-	-	-	4	4	4	4	4
Nombre de détecteurs polarisés	4	6	12	8	8	8	8	-	-
Largueur de bande relative ($\Delta\nu/\nu$)	0.2	0.2	0.2	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37
Transmission :	1.0	1.0	1.0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Résolution angulaire en (minutes d'arc)	30	24	14	9.2	7.1	5.0	5.0	5.0	5.0
Sensibilité : ΔT (μK) :	6.0	7.3	11.3	6	6.6	10.4	41	46	21840
Sensibilité polarisations Q et U, ΔT (μK) :	8.5	10.3	15.9	8.5	13.2	20.8	82	-	-

3.2.1 Modèle simple des émissions astrophysiques

L'intensité du signal reçu par un détecteur supposé parfait observant à une fréquence quelconque dans les domaines millimétrique et submillimétrique est la somme d'émissions de différentes composantes astrophysiques. Soit $f(\nu, \vec{r})$ le signal total provenant de la direction $\vec{r} \equiv (\theta, \phi)$ et ν la fréquence du détecteur. Il s'écrit :

$$f(\nu, \vec{r}) = \sum_i s_i(\nu, \vec{r}) \quad (3.1)$$

Le fait que l'on observe un mélange linéaire des composantes est extrêmement bien expliqué en théorie et aussi vérifié en pratique. Même en direction du plan galactique, où les composantes galactiques sont extrêmement lumineuses, l'épaisseur optique dans le domaine de fréquence du CMB est très faible. Ainsi, les photons dans le domaine millimétrique traversent la totalité du disque de la Galaxie sans interagir avec la matière présente. Les anisotropies du CMB et les autres émissions ne sont donc pas "déformées". Par ailleurs, on a vu précédemment que lorsqu'ils traversent les amas de galaxies, une partie des photons du CMB interagissent avec les électrons chauds du gaz intergalactique et changent de direction et d'énergie, conduisant à l'effet SZ. Mais cet effet est additif et possède une dépendance en fréquence différente (du moins pour l'effet thermique). Il ne modifie pas les anisotropies primaires du CMB puisqu'elles sont du second ordre comparé au niveau moyen du CMB (l'effet SZ est

donc indépendant des anisotropies du CMB, bien qu'il puisse exister des corrélations indirectes dans la position des amas avec les grandes structures du CMB, en raison de l'effet Sachs-Wolfe intégré).

La première hypothèse forte sur laquelle reposent l'ensemble des méthodes de séparation de composantes est que l'amplitude de l'émission provenant de chaque composante est le produit d'une fonction de la fréquence et d'une fonction de la direction sur le ciel. Ceci doit être vérifié sur la région du ciel couverte par les cartes d'observation. L'émission totale s'écrit alors :

$$f(\nu, \vec{r}) = \sum_i g_i(\nu) s_i(\vec{r}) \quad (3.2)$$

Cette hypothèse bien qu'extrêmement simple est toutefois assez réaliste concernant les émissions de la plupart des composantes. Voyons en résumé ce qu'il en est pour les composantes les plus importantes :

- **Les anisotropies du CMB.** L'équation 3.2 est vérifiée avec une excellente approximation. La dépendance en fréquence est donnée par la dérivée d'un corps noir à la température de $T_{\text{CMB}} = 2.726$ K.

$$f_{\text{CMB}}(\nu, \vec{r}) = \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} \Big|_{T=2.726 \text{ K}} \Delta T(\vec{r}) \quad (3.3)$$

- **L'émission de la poussière.** On a vu que la dépendance en fréquence de l'émission thermique prend la forme suivante :

$$f_{\text{pous}}(\nu, \vec{r}) = \nu^\alpha B(\nu, T_d) s_{\text{pous}}(\vec{r}) \quad (3.4)$$

La température T_d de la poussière peut varier en fonction de la région du ciel considérée, en particulier au niveau du plan galactique. Toutefois, dans le domaine de fréquence des observations du CMB, une petite variation de température de la poussière a très peu d'influence sur son spectre d'émission car à basse fréquence $B(\nu, T_d) \approx \nu^2$

- **L'effet SZ.** Dans la partie 2.2.2 on a vu que dans la limite classique (température faible des amas, applicable à la plupart des amas de galaxies) les dépendances en fréquence et en position sur le ciel de l'émission SZ thermique peuvent être séparées. Concernant l'effet cinétique, qui possède un spectre proportionnel à celui du CMB, l'équation 3.2 est parfaitement vérifiée.
- **L'émission synchrotron.** Son spectre est bien décrit par une loi de puissance. En revanche, des variations significatives de l'indice spectral en fonction de la région du ciel sont attendus. Ceci rend l'équation 3.2 relativement approximative.

- **L'émission free-free** Les dépendances en fréquence et en position peuvent être considérées comme séparées avec une bonne approximation.
- **Les sources ponctuelles** Elle sont problématiques dans le sens où chaque source possède son propre spectre d'émission. L'application des méthodes de séparation de composantes suppose la soustraction au préalable des sources ponctuelles par des méthodes indépendantes. Le fond diffus infrarouge constitué de l'ensemble des sources non-résolues est très mal modélisé par la relation 3.2

3.2.2 Modèle des observations

Ayant établi un modèle pour l'émission des composantes astrophysiques, intéressons nous à l'intensité du signal observé par un détecteur supposé parfait. L'intensité du signal astrophysique, notée I_d , mesurée par un détecteur d de résolution angulaire que l'on suppose pour l'instant infinie, est intégrée sur la bande passante w_d de fréquence :

$$I_d(\vec{r}) = \int_0^\infty f(\nu, \vec{r}) w_d d\nu \quad (3.5)$$

où \vec{r} est la direction d'observation. Typiquement pour des expériences telles qu'Archeops ou Planck les détecteurs possèdent une largeur de bande w_d de l'ordre de 25% par rapport à leur fréquence centrale d'observation. A partir de l'équation 3.2, on peut développer la relation précédente sous la forme :

$$I_d(\vec{r}) = \sum_i \int_0^\infty g_i(\nu) w_d d\nu \cdot s_i(\vec{r}) \quad (3.6)$$

Les mesures par les bolomètres ou les antennes ne donnent pas directement accès à des valeurs d'intensité d'émission. Les quantités mesurées sont des variations de tension ou d'intensité du courant à travers l'électronique des détecteurs. Il est donc nécessaire d'étalonner le signal avec des sources d'émission connues. Notons α_d le coefficient d'étalonnage du détecteur d . L'équation 3.6 peut être réécrite plus simplement :

$$I_d(\vec{r}) = A_{di} \cdot s_i(\vec{r}) \quad (3.7)$$

où

$$A_{di} = \alpha_d \int_0^\infty g_i(\nu) w_d d\nu \quad (3.8)$$

On effectue dans l'équation 3.7 une sommation implicite sur l'ensemble des composantes. Les coefficients A_{di} sont les éléments d'une matrice appelée "matrice de mélange". Chaque élément de la matrice donne l'amplitude d'une composante à travers l'observation d'un des détecteurs.

Stratégies d'observation

Les observations des anisotropies du CMB par de nombreuses expériences depuis le satellite COBE jusqu'à présent, sont réalisées pixel par pixel en balayant le ciel (les expériences interférométriques ne sont pas incluses). La lumière observée dans le domaine radio est focalisée par un miroir sur un ou plusieurs détecteurs situés sur le plan focal. Durant les observations du CMB, pour chaque petit intervalle de temps, le miroir pointe dans une direction particulière du ciel, et une mesure par chaque détecteur est réalisée. La direction de pointage change au cours du temps afin de couvrir une région importante du ciel. Les données dont nous disposons à l'issue des observations sont donc naturellement ordonnées dans le temps. Il est par la suite nécessaire de les reprojeter sur le ciel dans le but de former des cartes.

Le signal astrophysique mesuré au temps t dans la direction \vec{r} qui tombe dans le pixel p de la carte peut être écrit de la manière suivante (en supposant une résolution angulaire infinie) :

$$I_d(t) = P_{dtp} \sum_i A_{di} s_i(p) \quad (3.9)$$

où P est la matrice de pointage. Chacune des lignes de P ne contient dans le cas idéal qu'un seul élément différent de 0. Cet élément est égal à 1.

L'effet de lobe

On a vu dans la partie 3.1.3 que les détecteurs des instruments de Planck ont des résolutions angulaires très différentes, qui varient entre 5 et 33 minutes d'arc suivant la fréquence d'observation. Pour une analyse jointe des observations par plusieurs détecteurs, il est nécessaire de prendre en compte l'effet des lobes dans le modèle des observations (voir figure 3.4). La forme spatiale d'un lobe d'un détecteur quelconque d , que l'on note pour la suite $b_d(\theta, \phi)$ correspond à l'image d'un point sur le ciel observée par ce détecteur. Dans le cas simple où $b_d(\theta, \phi)$ est symétrique, l'intensité du signal astrophysique mesuré est le résultat d'une convolution du signal réel avec $b_d(\theta, \phi)$:

$$s_i(\vec{r}) \longrightarrow \int b_d(|\vec{r} - \vec{r}'|) s_i(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.10)$$

Dans le cas plus général où le lobe est asymétrique, l'intensité, qui dans le cas d'un détecteur parfait est donnée dans le paragraphe précédent par l'équation 3.9, peut être exprimée par la relation suivante, dans la limite où la taille angulaire des pixels est infiniment petite :

$$I_d(t) = P_{dtp} \sum_i A_{di} \sum_{p'} B_{dpp'} s_i(p') \quad (3.11)$$

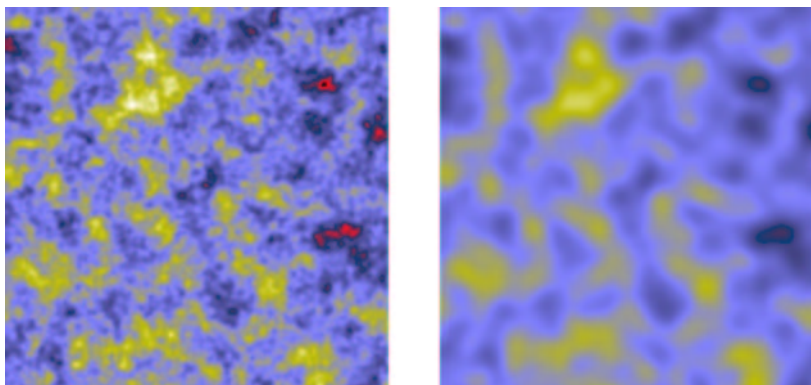


Fig. 3.4: Petites cartes simulées des anisotropies du CMB, de taille $12.5 \times 12.5^\circ$, possédant des résolutions différentes. La carte de droite est convoluée à la résolution des détecteur à 30 GHz de Planck LFI (33 minutes d'arc). La carte de gauche possède la résolution des bolomètres hautes fréquences de HFI (5 minutes d'arc). L'analyse des données de Planck (ainsi que de la plupart des expériences CMB) nécessite une modélisation précise des effets de lobes.

où B_d est une matrice dont chaque élément indexé par (p, p') donne l'amplitude du lobe au niveau du pixel p , lorsque celui-ci est centré sur le pixel p' . Cette matrice peut être combinée avec la matrice de pointage P , la matrice résultante $M_{tp'} = P_{d_{tp}} B_{pp'}$ est très "creuse" (elle contient un nombre important de 0) du fait de la largeur relativement réduite des lobes par rapport au champ du ciel observé.

Le bruit

Le bruit dans les mesures des anisotropies du CMB par des bolomètres ou des antennes possède des origines et aussi des propriétés spectrales différentes. Le bruit "dit" de photon est le plus fondamental. Il ne peut pas être contourné dans le sens où il ne dépend pas des détecteurs. Il résulte des fluctuations quantiques du nombre de photons du CMB. Ces fluctuations sont relativement importantes car, comme on l'a vu précédemment, la température moyenne du CMB est grande devant l'amplitude des anisotropies primordiales. Le bruit de photon suit avec une très bonne approximation une statistique gaussienne (le nombre de photons reçus suit une statistique de Poisson de moyenne élevée). Il est naturellement décorrélé temporellement, ainsi il possède un spectre de puissance constant (bruit blanc).

Il existe aussi des sources de bruit intrinsèques aux détecteurs. Il s'agit par exemple de bruits provenant de l'électronique. Ces sources de bruit possèdent généralement une contribution à basse fréquence de type $1/f$. Certaines émissions thermiques au sein de l'instrument peuvent contribuer significativement aux basses fréquences du bruit. Ces émissions peuvent être créées par des fluctuations de température des cornets, des miroirs, mais aussi des différents étages de refroidissement des instruments (nous

traiterons de ces effets systématiques dans le chapitre V). Le spectre de puissance de la somme des bruits est décrit approximativement par la forme suivante :

$$P_n(f) = K \left(1 + \left(\frac{f_{\text{knee}}}{f} \right)^\alpha \right) \quad (3.12)$$

où f est la fréquence du signal, f_{knee} la fréquence caractéristique (fréquence “coude”) qui marque la transition entre la partie blanche du bruit et la partie basse fréquence. L'indice spectral α est typiquement compris entre 1 et 2.5. Un spectre de puissance proportionnel à $(1/f)^2$ correspond est celui d'une marche aléatoire. Dans la marche aléatoire, chaque nouveau point de mesure est généré suivant une statistique gaussienne de variance fixée, et dont la moyenne est égale au point précédent. Les fréquences limites qui définissent le domaine de validité de la relation 3.12 sont : $f_{\text{min}} = 1/T_{\text{total}}$ et $f_{\text{max}} = 1/(2\Delta T)$, T_{total} est le temps de mesure total et ΔT est l'intervalle de temps entre deux mesures consécutives. Le facteur 1/2 dans la relation entre ΔT et f_{max} provient du fait qu'aucune information n'est disponible à des échelles inférieure à la 2 fois la taille de l'élément de résolution.

La constante K est généralement exprimée en unité de température au carré par Hz (ou en Volt au carré par Hz pour des données non-étalonnées). La racine carrée de K serait la NEP (Noise Equivalent Power) du bruit si celui-ci était parfaitement blanc ($f_{\text{knee}} = 0$). La NEP est la puissance nécessaire pour produire un rapport signal sur bruit de 1 en une demi-seconde. La relation entre la variance par échantillon σ_n du bruit et K est la suivante :

$$K = \frac{\sigma_n^2}{\int_{f_{\text{min}}}^{f_{\text{max}}} \left(1 + \left(\frac{f_{\text{knee}}}{f} \right)^\alpha \right) df} \quad (3.13)$$

La figure 3.5 montre le spectre d'une simulation de bruit caractéristique dans les mesures d'un bolomètre, ainsi que la série temporelle associée.

A l'aide de la relation 3.11, écrivons le modèle des observations par un détecteur en fonction du temps :

$$I_d(t) = P_{d_{tp'}} \sum_p B_{dp'p} \sum_i A_{di} s_i(p) + n_d(t) \quad (3.14)$$

où n_d est le terme de bruit. Les bruits de photons ou provenant de l'électronique de lecture sont décorrélés entre les différents détecteurs. Ce n'est pas le cas du bruit créé par les fluctuations de température dans l'instrument qui affectent l'ensemble du plan focal. En général, la partie corrélée du bruit fluctue à basse fréquence dans les séries temporelles.

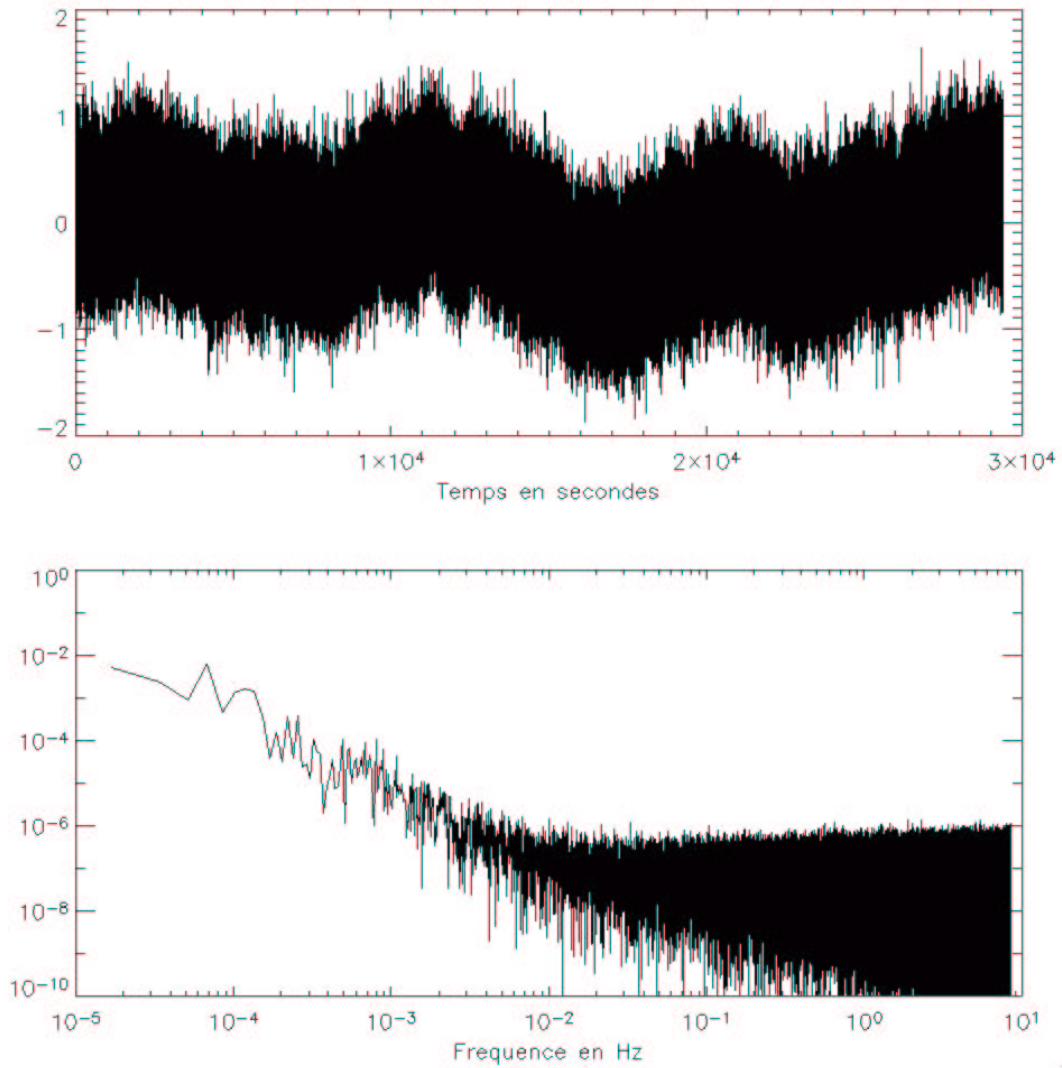


Fig. 3.5: Simulation de bruit typique d'un bolomètre. La figure du haut montre la série temporelle du bruit, la figure du bas montre le spectre de puissance de la réalisation. Les paramètres du spectre, $\alpha = 2$ et $f_{\text{knee}} = 0.01$ Hz sont réalistes. La déviation standard de la partie blanche du bruit est de 1.

3.2.3 Les cartes d'observations

La mesure du spectre de puissance du CMB nécessite la fabrication de cartes du ciel. Les données ordonnées en temps doivent être reprojctées efficacement afin de diminuer le bruit résiduel sur les cartes. Les dérives basses fréquences du bruit sont particulièrement gênantes pour l'analyse spectrale car une fois reprojctées, elles introduisent des fluctuations spatiales à toutes les échelles angulaires. La soustraction de ces dérives fait l'objet de nombreux efforts pour l'analyse des données.

La fabrication de cartes

Une méthode optimale de reconstruction des cartes de composantes $s_i(p)$ à partir des mesures ordonnées en temps $I_d(t)$ nécessite l'inversion de l'équation 3.14, en considérant conjointement l'ensemble des détecteurs. Cette méthode s'appuie sur les redondances des observations sur le ciel et permet ainsi de soustraire efficacement les dérives du bruit aux plus basses fréquences ². Cette approche est, en pratique, extrêmement coûteuse en terme de mémoire et de temps calcul. En effet, il serait nécessaire d'inverser des matrices dont la dimension est $N_t^2 \times N_d^2$, où N_t est le nombre d'échantillons en temps et N_d le nombre de détecteurs. Ce chiffre s'élève à 10^{12} pour Planck. De plus, cette approche requière la connaissance *a priori* des matrices de mélange des composantes et des éventuels effets systématiques, mais aussi des spectres de puissance du bruit.

Une approche intermédiaire consiste à traiter les différents détecteurs indépendamment dans le but de produire des cartes du ciel "observées" par chaque détecteur. Ces cartes seraient alors idéalement constituées de la somme des émissions de toutes les composantes à la fréquence des détecteurs considérés. L'objectif de cette méthode est donc l'estimation du terme $B_{dp'} A_{id} s_i(p)$ que l'on note $y(p)$.

Supposons que le bruit possède une statistique gaussienne de variance N :

$$N_{d_{tt'}} = \langle n_d(t) \cdot n_d(t') \rangle \quad (3.15)$$

où $n_d(t)$ est le bruit du détecteur d au temps t (qui comprend les composantes de bruit systématique). La solution est linéaire dans le cadre de ce modèle (voir par exemple Borrill (1999)) et elle s'écrit :

$$y_d = (P_d^t N_d^{-1} P_d)^{-1} P_d^t N_d^{-1} I_d \quad (3.16)$$

Dans le cas simple où le bruit est blanc et stationnaire, la matrice de covariance du bruit est $N = \sigma_n^2 \cdot \text{Id}$, Id étant la matrice identité. L'équation précédente est

² Certains pixels sur les cartes peuvent être "vus" à des temps très différents. Les fluctuations du bruit dont la période est supérieure à l'intervalle de temps entre chaque passage seront ramenées au niveau du bruit blanc

alors équivalente à une simple reprojction des mesures temporelles sur des cartes pixellisées en effectuant une simple moyenne des points de mesures qui tombent dans le même pixel. Dans le cas général, il est difficile de connaître précisément la matrice N_d , et aussi de l'inverser en raison de sa taille importante. On a alors recours à des méthodes itératives.

Un modèle simple de cartes d'observation

Après reprojction des données en utilisant des méthodes de fabrication de cartes optimales, le modèle des cartes d'observation s'écrit simplement à l'aide des équations 3.14 et 3.16 :

$$y_d(p') = \sum_i A_{di} \sum_p B_{dp'p} s_i(p) + n_d(p') \quad (3.17)$$

avec :

$$n_d(p') = \sum_t W_{dp't} n_d(t) \quad (3.18)$$

où l'on a noté :

$$W_d = (P_d^t N_d^{-1} P_d)^{-1} P_d^t N_d^{-1}, \quad (3.19)$$

$n_d(p')$ représente le bruit dans le pixel p' . Rappelons que le terme $B_{dp'p}$ reproduit l'effet du lobe sur le signal du ciel (il s'agit d'une convolution à condition que le lobe soit symétrique).

Dans l'espace de Fourier

Considérons une petite carte rectangulaire sur le ciel. Le pixel p est repéré par deux coordonnées (p_1, p_2) relatives aux deux côtés. La transformée de Fourier discrète bidimensionnelle de $y_d(p)$ est définie par :

$$y(k_1, k_2) = \frac{1}{N_p} \sum_{p_1=0}^{n_1-1} \sum_{p_2=0}^{n_2-1} y(p_1, p_2) \exp\left(\frac{-2i\pi k_1 p_1}{n_1}\right) \exp\left(\frac{-2i\pi k_2 p_2}{n_2}\right) \quad (3.20)$$

avec n_1, n_2 le nombre de pixels des côtés repérés par p_1 et p_2 , et $N_p = n_1 \times n_2$. Les paramètres k_1 et k_2 sont les modes de Fourier. On définit \vec{k} le vecteur de coordonnées k_1, k_2 . Si la carte considérée est carrée, la norme de \vec{k} d'une fluctuation est reliée à son l'échelle angulaire θ par $\|\vec{k}\| = 2N_p \theta_{\text{pix}} / \theta$, où θ_{pix} est la taille angulaire d'un pixel de la carte.

En développant la relation 3.20, on obtient le modèle suivant, à l'aide de l'équation 5.3 (en négligeant le terme relatif aux effets systématiques) :

$$y_d(\vec{k}) = \sum_i A_{id} \mathcal{F} \left\{ B_{dp'p} s_i(p') \right\} (\vec{k}) + n_d(\vec{k}) \quad (3.21)$$

\mathcal{F} signifie transformée de Fourier. On a explicité à nouveau la sommation sur les composantes dans l'équation précédente pour la clarté de l'exposé. Le produit $B_{d_{p'p}} \cdot s_i(p')$ est équivalent à un produit de convolution si au moins une des deux conditions suivantes est remplie :

- Le lobe est symétrique. Concernant les détecteurs de Planck, les lobes seront relativement bien approximés par des gaussiennes symétriques
- Les lignes de balayage du ciel sont parallèle sur la région considérée. Cela sera vérifié pour Planck sur des petites régions au niveau de l'équateur écliptique.

Supposons qu'une des deux conditions soit remplie sur le domaine de la petite carte considérée. La convolution dans l'espace réel devient un produit dans l'espace de Fourier. L'équation 3.21 peut alors être simplifiée et s'écrit :

$$y_d(\vec{k}) = \sum_i A_{di} B_d(\vec{k}) s_i(\vec{k}) + n_d(\vec{k}) \quad (3.22)$$

Soit $\mathbf{y}(\vec{k})$ un vecteur tel que l'élément numéro d est la valeur mesurée par le détecteur d pour un mode de Fourier \vec{k} donné. De même, soient $\mathbf{s}(\vec{k})$ et $\mathbf{n}(\vec{k})$ deux vecteurs dont les éléments sont respectivement les composantes et les bruits des détecteurs. Enfin, soit \bar{B} la matrice diagonale construite à partir du vecteur B_d . En résumé :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{m_d} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ s_{m_c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \cdot \\ n_{m_d} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (3.23)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m_c} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m_d1} & \cdot & \cdot & a_{m_d m_c} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & 0 \\ & 0 & \cdot & \\ & & & B_{m_d} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Réécrivons l'équation 3.22 sous sa forme matricielle :

$$Y(\vec{k}) = \bar{B}(\vec{k}) A \mathbf{s}(\vec{k}) + \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (3.25)$$

Ce modèle des cartes d'observation, extrêmement simple, sert de base aux méthodes de séparation de composantes.

4. LES MÉTHODES DE SÉPARATION DE COMPOSANTES

Le but des méthodes de séparation de composantes est de produire les cartes les plus propres possibles de l'émission des différentes composantes. Selon les techniques d'analyse classiques, la séparation des composantes est découplée des méthodes de fabrication de cartes d'observations à partir des données ordonnées en temps pour des raisons algorithmiques (un traitement plus optimal qui résulterait de la fusion entre les deux types de méthodes est extrêmement lourd en temps calcul). Nous présentons dans ce chapitre différentes méthodes de séparation de composantes utilisées au sein de la communauté CMB. Elles peuvent être réparties en deux groupes : les méthodes "classiques" et les méthodes "en aveugle".

4.1 Les méthodes "classiques" de séparation de composantes

Les méthodes classiques de séparation de composantes s'appuient sur le modèle des observations décrit dans la partie 3.2.3 par l'équation 3.25. Ces méthodes nécessitent la connaissance parfaite de la matrice de mélange des composantes (matrice A) et, par conséquent, de leurs lois d'émission.¹

La solution la plus simple pour les cartes de composantes est naturellement obtenue en inversant la matrice de mélange (où on néglige pour simplifier l'effet du lobe, qui introduit une dépendance en \vec{k}) si celle-ci est carrée, autrement dit si il y a autant de composantes que d'observations. Dans le cas plus général où le nombre de composantes est inférieur au nombre de détecteurs, la solution la plus simple est celle du moindre carré :

$$\hat{s} = (A^t A)^{-1} A^t y \quad (4.1)$$

où \hat{s} signifie estimée de s . Pour obtenir cette solution, aucun poids n'est donné aux cartes d'observations en fonction de leurs niveaux de bruits, qui par ailleurs, peuvent être relativement bien déterminés lors des différentes étapes de traitement des données, et en particulier lors de l'étape de fabrication de cartes.

Nous allons dans cette partie, étudier plus en avant les principes des méthodes "optimales" (dans le cadre d'un modèle simple) de séparation de composantes. Nous allons décrire en particulier la méthode de Wiener dont l'application pour l'analyse des anisotropies du CMB résulte du travail pionnier de Tegmark et Efstathiou (1996) et de Bouchet et Gispert (1999). Nous décrirons aussi la méthode du maximum d'entropie introduite par Hobson et al. (1998). Nous pourrions aussi voir Prunet et al. (2001), Stolyarov et al. (2002), Vielva et al. (2001), ainsi que Barreiro (2003) pour une application sur les données de la mission COBE.

¹ Il s'agit du principal défaut de ces méthodes, en particulier certaines composantes galactiques comme on l'a vu dans le chapitre II, ont des comportements en fonction de la fréquence mal connus.

4.1.1 L'approche Bayésienne

Soit une hypothèse H et étant donné une série de mesures D , la probabilité *a posteriori* $P(H|D)$ que l'hypothèse soit vérifiée est donnée par le théorème de Bayes :

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)} \quad (4.2)$$

où $P(H)$ est l'*a priori* sur l'hypothèse, $P(D)$ est l'évidence et $P(D|H)$ est la vraisemblance.

Pour notre application, les cartes d'observation dans l'espace de Fourier $y(\vec{k})$ constituent les données D et l'évidence est une constante. Nous recherchons les cartes de composante $s(\vec{k})$. Leur probabilité *a posteriori* est donnée par :

$$P(s|y) \propto P(y|s)P(s) \quad (4.3)$$

4.1.2 Le maximum de vraisemblance

Considérons tout d'abord le cas où nous ne faisons pas d'*a priori* sur les composantes. La probabilité $P(s)$ est alors une constante. La solution que nous recherchons est celle du maximum de vraisemblance. Nous supposons que le bruit dans les observations est une variable aléatoire de statistique gaussienne. Cette hypothèse est tout à fait justifiée car le bruit résultant des fluctuations quantiques du nombre de photons du CMB détectés suit une distribution de Poisson, et le nombre moyen de photons est extrêmement grand. Soient $N_{dpd'p'} = \langle n_{dp}n_{d'p'} \rangle$ les éléments de la matrice d'autocorrélation du bruit. Supposons que le bruit est stationnaire sur les cartes. Celui-ci est alors décrit par une matrice d'autocorrélation dans l'espace de Fourier dont les éléments non diagonaux ($\vec{k} \neq \vec{k}'$) sont nuls. Cette matrice est donnée par $N_{\vec{k}} = \langle n(\vec{k})n(\vec{k})^\dagger \rangle$, qui est de taille égale au nombre de détecteurs au carré. On rappelle que $n(\vec{k})$ est une variable complexe et † signifie complexe conjugué. L'indépendance des coefficients de Fourier se traduit par la relation suivante pour la vraisemblance :

$$P(y|s) \propto \prod_{\vec{k}} P(y_{\vec{k}}|s) \quad (4.4)$$

Par conséquent, dans le cas où les spectres de puissance du bruit sont parfaitement connus (à l'issue de l'étape de fabrication de cartes par exemple), elle s'écrit :

$$P(y|s) \propto \prod_{\vec{k}} P(n|s) \quad (4.5)$$

$$\propto \prod_{\vec{k}} \exp(-n_{\vec{k}}^\dagger N_{\vec{k}}^{-1} n_{\vec{k}}) \quad (4.6)$$

A partir du modèle des observations 3.25 on obtient :

$$P(y|s) \propto \exp \left[- \sum_{\vec{k}} (\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k})\mathbf{s}(\vec{k}))^\dagger N_{\vec{k}}^{-1} (\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k})\mathbf{s}(\vec{k})) \right] \quad (4.7)$$

ici, la matrice de mélange $A(\vec{k})$ intègre le lobe des détecteurs (elle est donnée par $\bar{B}(\vec{k})A$ dans l'équation 3.25). On peut noter qu'il n'y a pas d'exposant 1/2 dans l'expression de la vraisemblance, car $N_{\vec{k}}$ est la variance d'une variable complexe, égale, dans notre problème, à deux fois la variance de sa partie réelle ou imaginaire.

La solution du maximum de vraisemblance

D'après l'équation 4.7, la solution \hat{s} du maximum de vraisemblance est telle que la fonction $\chi^2(s) = \sum_{\vec{k}} (\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k})\mathbf{s}(\vec{k}))^\dagger N_{\vec{k}}^{-1} (\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k})\mathbf{s}(\vec{k}))$ est minimale. La dérivée $\frac{\partial \chi^2}{\partial s}$ doit donc être nulle, elle s'écrit indépendamment pour chaque valeur de \vec{k} :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial s} = -2A^t(\vec{k})N_{\vec{k}}^{-1} (\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k})\hat{\mathbf{s}}(\vec{k})) = 0 \quad (4.8)$$

En développant, on obtient la solution :

$$\hat{\mathbf{s}}(\vec{k}) = \left(A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) \right)^{-1} A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} \mathbf{y}(\vec{k}) \quad (4.9)$$

Pour la suite, définissons la matrice M_{MV} comme :

$$M_{MV}(\vec{k}) = \left(A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) \right)^{-1} A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} \quad (4.10)$$

Cette méthode, qui nécessite la connaissance *a priori* des spectres de bruit, possède un double avantage. Tout d'abord les cartes d'observations les moins bruitées auront un poids statistique plus important dans l'inversion. Ensuite, la méthode n'introduit pas de biais (liés à des pertes de puissance) ou de mélange des autres composantes dans les différentes cartes de composantes reconstruites. Vérifions ceci en remplaçant \mathbf{y} par son expression dans l'équation 4.9, ce qui nous donne :

$$\hat{\mathbf{s}}(\vec{k}) = M_{MV}(\vec{k}) A(\vec{k}) \mathbf{s}(\vec{k}) + \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (4.11)$$

$$= \mathbf{I}_d \mathbf{s}(\vec{k}) + \tilde{\mathbf{n}}(\vec{k}) \quad (4.12)$$

où \mathbf{I}_d est la matrice identité et $\tilde{\mathbf{n}}(\vec{k})$ est le bruit résultant dans les cartes de composantes estimées.

4.1.3 L'ajout d'*a priori* sur les composantes

La solution de Wiener

Supposons que l'émission des composantes astrophysiques en fonction de la position sur le ciel est une quantité aléatoire de statistique gaussienne. Supposons de plus

que ces composantes sont stationnaires (c.à.d. que leurs propriétés statistiques sont indépendantes de la région du ciel considérée). Les amplitudes des composantes dans l'espace de Fourier sont indépendantes et les spectres de puissance sont donnés par la matrice de corrélation suivante :

$$C_{\vec{k}} = \langle s(\vec{k})s(\vec{k})^\dagger \rangle \quad (4.13)$$

L'*a priori* consiste à supposer connus les spectres de puissance des composantes. En pratique, nous possédons quelques informations sur ces spectres, grâce aux observations préexistantes, comme par exemple les observations IRAS de l'émission de la poussière. Une mesure des spectres de puissance à partir des données elles-mêmes peut aussi être utilisée comme *a priori* (voir le chapitre VI où j'expose la méthode d'estimation spectrale multi-composantes qui a fait l'objet de mon travail de thèse). La probabilité *a priori* est alors donnée par :

$$P(s) = \exp \left[- \sum_{\vec{k}} s(\vec{k})^\dagger C_{\vec{k}}^{-1} s(\vec{k}) \right] \quad (4.14)$$

La probabilité *a posteriori* s'écrit simplement :

$$P(s|y) = \exp \left[-\chi^2(\mathbf{s}(\vec{k})) - s(\vec{k})^\dagger C_{\vec{k}}^{-1} s(\vec{k}) \right] \quad (4.15)$$

L'estimée \hat{s} des composantes est obtenue en maximisant l'expression précédente. Comme dans la partie 4.1.2, la solution s'obtient facilement :

$$\hat{\mathbf{s}}(\vec{k}) = \left(A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) + C_{\vec{k}}^{-1} \right)^{-1} A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} \mathbf{y}(\vec{k}) \quad (4.16)$$

Il s'agit de la solution de Wiener.

Notons M_W la matrice de Wiener donnée par :

$$M_W(\vec{k}) = \left(A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) + C_{\vec{k}}^{-1} \right)^{-1} A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} \quad (4.17)$$

Calculons l'erreur d'estimation des cartes de composantes par cette méthode :

$$\hat{\mathbf{s}}(\vec{k}) = \left(A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) + C_{\vec{k}}^{-1} \right)^{-1} A(\vec{k})^t N_{\vec{k}}^{-1} A(\vec{k}) \mathbf{s}(\vec{k}) + M_W(\vec{k}) \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (4.18)$$

La matrice de "transfert" $M_W A$ développée ci-dessus, n'est pas diagonale. Ainsi, après séparation, il subsiste dans les cartes de composantes obtenues des contaminations par les autres composantes. Ceci peut être justifié en se rappelant que la méthode de Wiener permet de maximiser le signal par rapport au bruit, ce dernier comprenant le bruit instrumental, mais aussi le signal provenant des autres composantes. Ainsi certaines combinaisons linéaires entre les détecteurs permettent de réduire la

contamination par le bruit de la carte de composante recherchée, au détriment de la contamination par les autres composantes.

Une autre caractéristique que l'on peut remarquer est que la matrice $M_W A$ possède une partie diagonale toujours inférieure à 1. Les composantes estimées sont donc filtrées, justifiant le nom, pour la méthode, de filtrage de Wiener. Le filtre effectif est naturellement donné par :

$$F(\vec{k}) = \text{diag}(M_W(\vec{k})A(\vec{k})), \quad (4.19)$$

diag signifiant partie diagonale.

Pour le cas limite où le bruit est négligeable devant les composantes, la solution de Wiener se réduit à celle du maximum de vraisemblance (équation 4.9).

Bien entendu, les émissions des différentes composantes astrophysiques ne sont pas gaussiennes (excepté le CMB probablement). C'est en particulier le cas pour les émissions SZ qui sont très localisées spatialement en direction des amas de galaxies. Le fait de supposer une statistique gaussienne pour les composantes revient à considérer que ces dernières sont complètement décrites par leurs spectres de puissance, la méthode de Wiener est de ce point de vue simplement sous-optimale (la non-gaussianité est une information supplémentaire qui n'est pas prise en compte). L'avantage principal de la méthode est qu'elle conduit à une solution linéaire, qui est obtenue indépendamment pour chaque coefficient de Fourier. La solution est extrêmement simple à mettre en oeuvre et elle peut être calculée rapidement par des ordinateurs modestes.

La méthode du maximum d'entropie

Un des moyens de prendre en compte la non-gaussianité des composantes pour leur séparation est de modifier la forme de leur distribution *a priori* $P(s)$ dans l'espace de Fourier.

Considérons un vecteur d'images h tel que :

$$\mathbf{s}(\vec{k}) = L_{\vec{k}} h(\vec{k}) \quad (4.20)$$

où $L_{\vec{k}}$ est une matrice de dimension $N_c \times N_c$, N_c étant le nombre de composantes. Elle est obtenue par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance spectrale des composantes : $C = LL^t$. Les composantes dans h sont décorrélatées de manière à satisfaire la relation (on ne précise pas la dépendance en \vec{k} dans l'équation) :

$$\langle ss^\dagger \rangle = \langle Lhh^\dagger L^t \rangle = L \langle hh^\dagger \rangle L^t = LL^t = C \quad (4.21)$$

Par des considérations d'invariance par changement de coordonnées et d'indépendance du système, on peut montrer (Skilling, 1989) que la probabilité *a priori* de h

doit prendre la forme :

$$P(h) = \exp[\alpha S(h, m_u, m_v)] \quad (4.22)$$

où m_u et m_v sont les paramètres du modèle des valeurs positives et négatives respectivement des parties réelles et imaginaires de h (Hobson et Lasenby, 1998). α est une constante appelée paramètre de régulation. La fonction $S(h, m_u, m_v)$ est l'entropie croisée de h , elle prend la forme suivante dans le cas où h est réel :

$$S(h, m_u, m_v) = \sum_{\vec{k}} \left\{ \psi(\vec{k}) - m_u(\vec{k}) - m_v(\vec{k}) - h(\vec{k}) \ln \left[\frac{\psi(\vec{k}) + h(\vec{k})}{2m_u(\vec{k})} \right] \right\} \quad (4.23)$$

où $\psi(\vec{k}) = [h(\vec{k})^2 + 4m_u(\vec{k})m_v(\vec{k})]^{1/2}$. Dans le cas où h est complexe, l'entropie totale est donnée par : $S(\mathcal{R}(h), \mathcal{R}(m_u), \mathcal{R}(m_v)) + S(\mathcal{I}(h), \mathcal{I}(m_u), \mathcal{I}(m_v))$, \mathcal{R} signifiant partie réelle et \mathcal{I} partie imaginaire. Pour notre application, d'après l'équation 4.21, on a $m_u = m_v = m = 1/\sqrt{2}$.

A la limite des petites fluctuations de h comparées aux paramètres m du modèle, la probabilité 4.22 tend vers une probabilité gaussienne d'écart type $\sigma = 4m/\alpha$. La distribution, pour des valeurs plus grandes de h , possède des "ailes" plus importantes que celle de la distribution gaussienne.

La solution de la méthode de maximum entropie (MEM dans la littérature, acronyme anglais de "Maximum Entropy Method"), pour les cartes de composantes \hat{s} , est obtenue en maximisant la probabilité *a posteriori* qui s'écrit :

$$P(s|y) \propto \exp [-\chi^2(h) + \alpha S_c(h, m)] \quad (4.24)$$

avec $\chi^2(h) = \sum_{\vec{k}} \left(\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k}) L_{\vec{k}} \mathbf{s}(\vec{k}) \right)^\dagger N_{\vec{k}}^{-1} \left(\mathbf{y}(\vec{k}) - A(\vec{k}) L_{\vec{k}} \mathbf{s}(\vec{k}) \right)$. La maximisation de l'expression 4.24 ne permet pas d'aboutir à une solution analytique pour \hat{s} . Il est nécessaire d'utiliser des techniques d'optimisation telles que les méthodes quasi-Newton ou de gradient conjugué.

Le paramètre de régularisation α est généralement choisi de telle sorte que l'on retrouve une probabilité gaussienne aux faibles fluctuations de h , soit $\alpha = 4m$ comme on l'a déjà vu. Cependant, il peut aussi être considéré comme un paramètre libre et estimé directement en adoptant une approche Bayésienne.

Les performances de cette méthode comparées à celles de la méthode de Wiener sont meilleures pour la reconstruction des composantes hautement non-gaussiennes comme les effets SZ. Concernant les composantes diffuses telles que le CMB ou les émissions galactiques, les deux méthodes donnent des résultats comparables. Dans la suite de cet exposé, je me concentrerai sur la méthode de Wiener.

4.1.4 Les méthodes d'inversion dérivées de la méthode de Wiener

La méthode de Wiener "corrigée"

On a vu précédemment que la méthode d'inversion de Wiener se comporte comme un filtre dont l'efficacité en fonction de la fréquence spatiale \vec{k} dépend du rapport bruit-sur-signal. L'objectif principal étant la mesure du spectre de puissance des anisotropies du CMB, il est peut être souhaitable d'utiliser une méthode de séparation de composantes permettant de construire une carte qui préserve en espérance l'amplitude des anisotropies. Autrement dit, si M est une matrice d'inversion quelconque telle que $\hat{s} = My$, il est souhaitable que les éléments diagonaux de la matrice MA soit égaux à l'unité. Il est possible de corriger la matrice de Wiener de cet effet. On obtient alors la matrice d'inversion suivante :

$$M_{WR} = \text{diag}(M_W A)^{-1} M_W \quad (4.25)$$

avec $\text{diag}(M_W A)$ une matrice diagonale telle que les éléments diagonaux sont égaux à ceux de $M_W A$, M_W étant la matrice de Wiener. Cette opération est équivalente à une déconvolution de chaque carte de composante après filtrage de Wiener.

Une méthode d'inversion semi-aveugle

Réécrivons l'expression de la matrice M_W de Wiener, que l'on a obtenue dans la section 4.1.3, sans préciser ici la dépendance en \vec{k} :

$$M_W = (A^t N^{-1} A + C^{-1})^{-1} A^t N^{-1} \quad (4.26)$$

Cette matrice peut être exprimée différemment en fonction de A , N et C . En multipliant M_W par $(ACA^t + N)(ACA^t + N)^{-1}$, on obtient :

$$M_W = (A^t N^{-1} A + C^{-1})^{-1} (A^t N^{-1} ACA^t + A^t) (ACA^t + N)^{-1} \quad (4.27)$$

qui, en regroupant les deux premières parenthèses, permet d'aboutir à la relation :

$$M_W = CA^t (ACA^t + N)^{-1} \quad (4.28)$$

Cette forme est en général moins utilisée que la précédente (4.27), car elle nécessite l'inversion de matrices de dimensions plus élevées (elle ne nécessite pas les inversions de N et C , mais ces matrices sont souvent diagonales). Toutefois, elle fait apparaître la matrice de covariance spectrale des observations définie par :

$$R_{yy}(\vec{k}) = \langle \mathbf{y}(\vec{k}) \mathbf{y}(\vec{k})^\dagger \rangle \quad (4.29)$$

qui s'écrit, en utilisant l'expression de y en fonction des paramètres du modèle :

$$R_{yy} = A \langle ss^\dagger \rangle A^t + \langle nn^\dagger \rangle \quad (4.30)$$

$$= ACA^t + N \quad (4.31)$$

Supposons que les composantes sont isotropes sur le ciel, c'est en particulier le cas des composantes dont l'origine est cosmologique (CMB, SZ) dans les modèles standards de la cosmologie. De même, supposons l'isotropie du bruit sur les cartes (ce qui n'est pas réaliste si les dérives basses fréquences n'ont pas été efficacement soustraites). Alors, les covariances spectrales des composantes (C), du bruit (N) et par conséquent des observations, ne dépendent que de la norme de \vec{k} . Les matrices de covariance spectrales des observations peuvent alors être estimées en effectuant une moyenne sur les valeurs de \vec{k} à module constant :

$$\tilde{R}_{yy_q} = \frac{1}{w_q} \sum_{\vec{k} \in D_q} \mathbf{y}(\vec{k}) \mathbf{y}(\vec{k})^t \quad (4.32)$$

où q est le numéro du domaine spectral, w_q est le nombre des fréquences \vec{k} qui appartiennent au domaine numéro q , noté D_q .

Si le nombre de points de mesure par domaine spectral est suffisamment important ($w_q \gg 1$), dans l'équation 4.28 la matrice de covariance des observations peut être remplacée par son estimée, ce qui nous donne :

$$M_W \simeq CA^t \tilde{R}_{yy}^{-1} \quad (4.33)$$

Corrigeons, comme dans la relation 4.25, du filtrage effectif des composantes inhérent à la méthode de Wiener. La matrice de Wiener "corrigée" est approximée par :

$$M_{WR} \simeq \text{diag}(CA^t \tilde{R}_{yy}^{-1} A)^{-1} CA^t \tilde{R}_{yy}^{-1} \quad (4.34)$$

Supposons qu'une des composantes est décorrélée des autres. Ecrivons l'expression cette composante i estimée par cette méthode :

$$\hat{s}_i = \sum_j \frac{1}{(CA^t \tilde{R}_{yy}^{-1} A)_{ii}} (CA^t \tilde{R}_{yy}^{-1})_{ij} \mathbf{y}_j \quad (4.35)$$

Les éléments de la matrice C disparaissent après développement. On obtient finalement :

$$\hat{s}_i = \sum_j \frac{\sum_k A_{ki} (\tilde{R}_{yy}^{-1})_{kj}}{\sum_k \sum_l A_{ki} A_{li} (\tilde{R}_{yy}^{-1})_{kl}} \mathbf{y}_j \quad (4.36)$$

Ainsi, il apparaît clairement que la solution dépend uniquement de la colonne de la matrice de mélange numéro i . De ce fait, pour obtenir une estimation de la composante d'intérêt par cette méthode, il n'est pas nécessaire de connaître les éléments de la matrice de mélange relatifs aux autres composantes, et par conséquent leurs lois

d'émission (de même il n'est pas nécessaire de connaître les spectres de puissance des composantes). Cette méthode peut être utilisée pour reconstruire une carte des anisotropies du CMB par la seule connaissance de leur loi d'émission.

L'ensemble des méthodes de séparation de composantes exposées dans ce chapitre sont résumées dans la table 4.1.

4.2 Les méthodes de séparation de composantes en aveugle

4.2.1 L'analyse en composantes indépendantes

Les méthodes "classiques" de séparation de composantes exposées dans le chapitre précédent utilisent la diversité des spectres d'émission des composantes et nécessitent leur connaissance *a priori* (plus particulièrement, elles nécessitent la connaissance de la matrice de mélange A). Depuis près d'une quinzaine d'années, de nombreuses techniques de séparation de composantes en aveugle, c'est à dire ne faisant pas d'*a priori* sur la matrice de mélange, ont été développées pour des applications diverses (séparations de signaux acoustiques, imagerie médicale, images astronomiques, etc...). Ces méthodes, appelées techniques ACI ("Analyse en Composantes Indépendantes"), permettent de séparer les composantes les plus indépendantes possibles en exploitant des déviations au modèle le plus simple de composantes gaussiennes indépendantes identiquement distribuées (ou "iid"). Il est en effet impossible de séparer en aveugle des composantes gaussiennes iid. Les méthodes ACI se distinguent ainsi de l'analyse en composantes principales qui est basée sur la diagonalisation des matrices de covariance spectrale des observations $\tilde{R}_{yy} = \sum_k y(k)^t y(k)$, et qui ne donne accès qu'à une combinaison linéaire entre composantes décorréelées².

Les comportements des composantes les plus directement exploitables pour leur identification en aveugle sont les suivants (Cardoso, 2001) :

- **la non-gaussianité**
- **la non-stationarité**
- **la corrélation spatiale**

L'analyse en composantes indépendantes fournit, suivant le modèle adopté (dans le cas non bruité), les composantes qui sont les plus décorréelées et non-gaussiennes, ou non-stationnaires, ou corrélées spatialement.

² L'analyse en composantes principales permet toutefois d'évaluer le nombre de composantes significatives dans les observations. Il est donné par le nombre de valeurs propres significatives de la matrice de covariance spectrale des observations

Tab. 4.1: Les différentes méthodes de séparation de composantes diffuses pour les observations du CMB.

Méthode	caractéristiques	formule
inversion simple	-ne prend pas en compte les niveaux relatifs de bruit -n'est pas invariant par renormalisation des observations	$\hat{s} = (A^t A)^{-1} A^t y$
inversion pondérée	-pas de contamination par les autres composantes après séparation -pas de filtrage effectif des composantes	$\hat{s} = (A^t N^{-1} A)^{-1} A^t N^{-1} y$
Wiener	-méthode rapide -maximise le rapport signal/bruit -filtrage effectif des composantes estimées	$\hat{s} = (A^t N^{-1} A + C^{-1})^{-1} A^t N^{-1} y$ ou $\hat{s} = C A^t (A C A^t + N)^{-1} y$
Wiener corrigé	mêmes caractéristiques que la méthode de Wiener sauf que le filtrage effectif est corrigé	$\hat{s} = \Lambda^{-1} (A^t N^{-1} A + C^{-1})^{-1} A^t N^{-1} y$ avec $\Lambda = \text{diag}[(A^t N^{-1} A + C^{-1})^{-1} A^t N^{-1} A]$
inversion semi-aveugle	-méthode de Wiener "corrigé" approximé -nécessite uniquement la connaissance <i>a priori</i> des éléments de A correspondant aux composantes recherchées	$\hat{s} = \text{diag}(A \tilde{R}_{yy})^{-1} A^t \tilde{R}_{yy}^{-1} y$
MEM	-méthode non linéaire, doit être résolue par itérations -similaire à la méthode de Wiener	non linéaire

4.2.2 Les méthodes utilisées au sein de la communauté “CMB”

L’utilisation de techniques ACI pour la séparation des composantes astrophysiques dans les observations du CMB n’est que très récente. Baccigalupi et al.(2000) ont introduit une méthode exploitant la non-gaussianité des composantes, basée sur un modèle des observations extrêmement simple, négligeant la présence de bruit : $y = A.s$; les observations y_d sont un mélange linéaire de composantes s_i . L’identifiabilité par cette méthode est garantie si au plus une des composantes est gaussienne. Ceci est la motivation principale pour l’utilisation d’une telle méthode puisque l’on s’attend à ce que seules les anisotropies du CMB aient une statistique gaussienne. La solution recherchée pour les cartes de composantes prend la forme : $\hat{s} = Wy$, où W est la matrice de séparation. La méthode fournit une solution pour la matrice W maximisant une mesure de la non-gaussianité des composantes, et donc permettant d’extraire les composantes les plus indépendantes possible ³ (voir Maino et al. (2002) pour une application de la méthode sur des simulations d’observation de Planck et Maino et al. (2003) pour son application sur les cartes d’observation de COBE-DMR). Cette technique possède essentiellement deux points faibles : le premier est qu’elle n’est pas basée sur un modèle des observations bruités, or les observations du CMB actuelles contiennent un niveau de bruit important, le second est dû à la présence du lobe des détecteurs qui n’est pas prise en compte.

Une seconde approche a été introduite par Snoussi et al. (2001) puis développée par Cardoso et al. (2002), Delabrouille et al. (2002a) et Patanchon et al. (2003). Elle exploite la diversité spectrale (ou la corrélation spatiale) des composantes. Elle est basée sur le modèle linéaire des observations décrit par l’équation 3.25. Elle prend ainsi en compte la présence de bruit dans les observations et l’effet du lobe des détecteurs. Les composantes et le bruit sont modélisés comme des processus gaussien stationnaires et isotropes. Tous les paramètres du modèle sont estimés, à savoir la matrice de mélange, le spectre de puissance des composantes et les spectres de puissance du bruit. Les cartes de composantes sont déterminées dans un second temps en appliquant la méthode de Wiener avec pour *a priori* les paramètres estimés en aveugle. Cette technique est développée en détails dans le chapitre VI. Son application sur les données de la mission ballon Archeops est présenté dans le chapitre VII.

³ Un mélange de composantes indépendantes est toujours moins gaussien que les composantes originales

5. SÉPARATION DE COMPOSANTES ET EFFETS SYSTÉMATIQUES

Dans le chapitre III, nous avons vu que pour de nombreuses expériences CMB telles que Planck, le bruit présent dans les données ordonnées en temps peut être corrélé entre les différents détecteurs, en fonction des sources de bruit dans l'instrument ou extérieures. La partie du bruit corrélée entre les détecteurs varie généralement à basse fréquence, c'est le cas du bruit induit par les fluctuations de température dans l'instrument. Le bruit basse fréquence est en partie soustrait des cartes à l'aide des méthodes optimales de reprojection des données. Il peut toutefois subsister un résidu important de bruit corrélé à des échelles inférieures à l'intervalle de temps entre chaque croisement sur le ciel.

Sous certaines conditions, le bruit corrélé peut être modélisé comme une somme de composantes systématiques dont le mélange dépend de la fréquence d'observation. Ainsi, il peut être judicieux d'adapter les méthodes de séparation des composantes pour une meilleure soustraction de tels effets systématiques. Pour des expériences telles que Planck, la difficulté majeure est que les composantes systématiques ne se projettent pas de la même façon sur le ciel pour deux détecteurs différents, car ces derniers sont généralement placés à des positions différentes dans le plan focal. Nous allons voir dans ce chapitre comment les méthodes de séparation de composantes peuvent être adaptées, pour le cas où les lignes de balayage sur le ciel sont parallèles. Nous appliquerons la méthode sur des simulations d'observation de Planck HFI sur des petites cartes carrées à haute latitude galactique.

5.1 Modélisation des effets systématiques

5.1.1 Modèle simple dans les données ordonnées en temps

La partie corrélée du bruit entre les différents détecteurs peut avoir différentes origines. Pour les expériences ballons ou au sol, ils peuvent être produits par des fluctuations dans l'émission de l'atmosphère. Ils peuvent aussi résulter, et cela concerne aussi les expériences satellites, des fluctuations de températures des différents étages du système de refroidissement du plan focal (voir le chapitre VII pour une discussion des effets vus dans Archeops). En première approximation, nous pouvons modéliser l'émission d'une grande partie des composantes de bruit corrélé d'origine thermique comme une fonction du temps multipliée par un coefficient qui dépend du détecteur :

$$f_{dc}(t) = R_{dc}m_c(t). \quad (5.1)$$

où c est le numéro de la composante systématique. Le modèle des observations ordonnées en temps 3.14 peut être généralisé :

$$I_d(t) = P_{d_{ip'}} \sum_p B_{d_{p'p}} \sum_i A_{di} s_i(p) + n_d(t) + \sum_c R_{dc} m_c(t). \quad (5.2)$$

$n_d(t)$ est la somme des bruits de photon et provenant de l'électronique de lecture des détecteur. Nous le supposons décorrélié d'une carte d'observation à l'autre. R_{dc} est un élément de la matrice de mélange des composantes systématiques et $m_c(t)$ est proportionnel à l'amplitude de l'effet systématique c .

5.1.2 Un modèle pour les cartes d'observations

Après reprojexion des données, à l'aide d'une méthode de fabrication de cartes exposée dans la partie 3.2.3, le modèle des cartes d'observations s'écrit d'après 3.17 :

$$y_d(p') = \sum_i A_{di} \sum_p B_{dp'p} s_i(p) + n_d(p') + \sum_t W_{d_{p't}} \sum_c R_{dc} m_c(t) \quad (5.3)$$

On rappelle que la matrice W_d est donnée par la relation :

$$W_d = (P_d^t N_d^{-1} P_d)^{-1} P_d^t N_d^{-1} \quad (5.4)$$

où P_d est la matrice de pointage et N_d est la matrice de corrélation temps-temps du bruit total (bruit + effet systématique) du détecteur d .

Notre objectif est d'établir une équation vectorielle de type 3.25 dans l'espace de Fourier, qui dépende uniquement des coordonnées spatiales (via \vec{k}). Nous souhaiterions factoriser les composantes systématiques en un produit d'une fonction de la position uniquement et d'un coefficient dépendant du détecteur (et de \vec{k} éventuellement). Dans le cas général concernant la plupart des expériences CMB, cette factorisation est impossible, même dans le cadre du modèle simple décrit par l'équation 5.1, car les détecteurs, situés à des positions différentes du plan focal, pointent au même instant dans des directions différentes du ciel. La figure 3.3 montre la disposition des bolomètres dans le plan focal de Planck. Plus spécifiquement à Planck, lorsqu'un détecteur observe un point du ciel à un instant t , le détecteur voisin, sur la même ligne du plan focal (direction horizontale dans la figure 3.3 correspondant à la direction de balayage du ciel de Planck), a observé (ou observera) le même point du ciel à un instant $t + \Delta t$. Si on considère maintenant un détecteur sur une ligne différente du plan focal par rapport à la direction de balayage, celui-ci observera ce point du ciel à un temps très différent, pouvant correspondre dans le cas de Planck à plusieurs cercles sur le ciel. Formellement, dans les équations 5.3 et 3.19, les éléments de la matrice $W_{d_{pt}}$ dépendent des éléments de la matrice de pointage $P_{d_{tp}}$ qui elle-même dépend de la position dans le plan focal du détecteur considéré. Ainsi, une fois reprojétés sur les cartes du ciel, les effets systématiques ont des formes spatiales très différentes d'une carte observée par un détecteur à une autre.

Toujours dans le cadre de la mission Planck, considérons une petite carte carrée couvrant une région du ciel proche de l'équateur en coordonnées écliptiques. Les lignes de balayage du ciel sont alors quasiment parallèles, comme le montre la figure 5.1. Les composantes systématiques sont, après reprojexion des séries temporelles sur cette

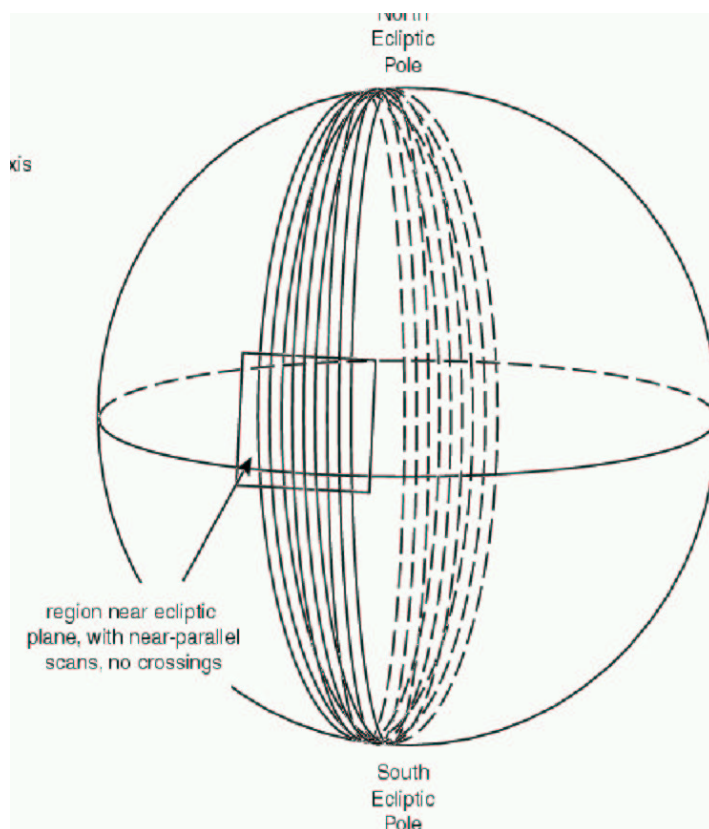


Fig. 5.1: Stratégie de balayage du ciel par les instruments de Planck. Dans les régions du ciel proches de l'équateur écliptique, les lignes de balayage sont presque parallèles.

région particulière du ciel, simplement décalées d'une observation à l'autre en fonction de la position du détecteur dans le plan focal. L'équation 5.3 conduit dans ce cas à la relation suivante :

$$y_d(p') = \sum_i A_{di} \sum_p B_{dp'p} s_i(p') + n_d(p') + \sum_c R_{dc} m_c(p' + \Delta p'_d) \quad (5.5)$$

avec $m_c(p')$ la carte de la composante systématique c après l'étape de fabrication de carte en utilisant le pointage du centre du plan focal. $\Delta p'_d$ est la position du détecteur d par rapport au centre du plan focal. Cette distance est exprimée en unité d'angle. En utilisant la propriété suivante de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F} \{m_c(p + \Delta p)\}(\vec{k}) = \exp \left[2i\pi \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\Delta p}}{N_p} \right) \right] m_c(\vec{k}) \quad (5.6)$$

la transformée de Fourier de l'équation 5.5 peut être calculée simplement :

$$y_d(\vec{k}) = \sum_i A_{di} \sum_p B_{dp'p} s_i(p') + n_d(\vec{k}) + \sum_c f_d(\vec{k}) R_{dc} m_c(\vec{k}) \quad (5.7)$$

où l'on a noté $f_d(\vec{k})$ l'exponentielle dans l'équation 5.6. Le système peut être écrit de façon plus compacte sous une forme matricielle qui regroupe les observations des différents détecteurs et aussi les composantes astrophysiques et systématiques. Ceci s'avère utile pour la suite.

On note $\bar{A}(\vec{k})$ la matrice de dimension $m_d \times (m_c + m_s)$, avec m_c le nombre total de composantes astrophysiques et m_s le nombre de composantes systématiques, telle que :

$$\bar{A}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} a_{11}B_1(\vec{k}) & a_{12}B_1(\vec{k}) & \cdot & a_{1m_c}B_1(\vec{k}) & r_{11}f_1(\vec{k}) & \cdot \\ a_{21}B_2(\vec{k}) & a_{22}B_2(\vec{k}) & \cdot & \cdot & r_{21}f_2(\vec{k}) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m_d1}B_{m_d}(\vec{k}) & \cdot & \cdot & a_{m_dm_c}B_{m_d}(\vec{k}) & r_{m_d1}f_{m_d}(\vec{k}) & \cdot \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

En regroupant l'ensemble des composantes (astrophysiques et systématiques) sous la forme d'un seul vecteur $\mathbf{s}(\vec{k})$ de dimension $m_c + m_s$, l'équation 5.7 donne :

$$\mathbf{y}(\vec{k}) = \bar{A}(\vec{k}) \mathbf{s}(\vec{k}) + \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (5.9)$$

On retrouve un modèle simple de mélange linéaire des composantes. La nouvelle matrice de mélange \bar{A} contient des coefficients complexes et dépend du mode \vec{k} considéré.

5.2 Simulations de petites cartes d'observations de Planck HFI

Nous allons traiter dans cette section des simulations d'observations de Planck HFI que j'ai réalisées au cours de ma thèse, sur des petites cartes carrées du ciel proche de l'équateur écliptique. Les lignes de balayage du ciel par les différents détecteurs pourront être supposées parallèles. Le but de ce travail est de tester une méthode de séparation de composantes généralisée au traitement de certains effets systématiques, que je présenterai dans la partie 5.3.

5.2.1 Simulation des composantes astrophysiques

Nous choisissons pour nos simulations une région du ciel à haute latitude galactique, où l'émission de l'ensemble des composantes galactiques est relativement faible. Les composantes dominantes dans le domaine de fréquence des détecteurs de Planck HFI entre 100 et 857 GHz sont le CMB et l'émission thermique de la poussière. Le but de cet exercice étant de tester la capacité d'une méthode de séparation de composante à séparer des effets systématiques, nous nous sommes limités aux composantes les plus dominantes.

Simulation des anisotropies du CMB

Dans le cadre des théories les plus simples de l'inflation, les anisotropies du CMB suivent une statistique gaussienne et sont décrites par un spectre de puissance C_ℓ . Il est donc possible, étant donné un jeu de paramètres cosmologiques, de calculer un spectre C_ℓ et de simuler une carte de CMB ayant les bonnes propriétés.

Nous allons négliger sur le domaine de la petite carte considérée, la courbure de la sphère céleste. Les étapes principales de la méthode de simulation sont les suivantes :

- A partir des C_ℓ , on calcule la fonction de corrélation à deux points $C(\theta)$ des anisotropies. $C(\theta)$ est déterminé pour chaque pixel de la carte, la valeur de θ attribuée est la distance angulaire par rapport au centre.
- Le spectre de puissance bidimensionnel $P(\vec{k})$ est calculé en effectuant la transformée de Fourier 2D de la carte de corrélation $C(\theta)$.
- Les modes de Fourier sont tirés au hasard suivant une statistique gaussienne de variance $P(\vec{k})$.
- La transformée de Fourier 2D inverse de la carte obtenue donne la carte des anisotropies du CMB.

La fonction de corrélation à deux points des variations de température du CMB est définie de la manière suivante :

$$C(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = C(\gamma) = \left\langle \frac{\Delta T(\vec{r}_1)}{T_0} \cdot \frac{\Delta T(\vec{r}_2)}{T_0} \right\rangle \quad (5.10)$$

où γ est la distance angulaire entre \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . Ainsi, en utilisant la relation 1.71, on peut écrire :

$$C(\gamma) = \left\langle \sum_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{\ell'} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{r}_1) \cdot a_{\ell' m'}^* Y_{\ell' m'}^*(\vec{r}_2) \right\rangle \quad (5.11)$$

En utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\vec{r}_1) Y_{\ell m}^*(\vec{r}_2) \quad (5.12)$$

on aboutit finalement à l'expression :

$$C(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_\ell P_\ell(\cos \gamma) \quad (5.13)$$

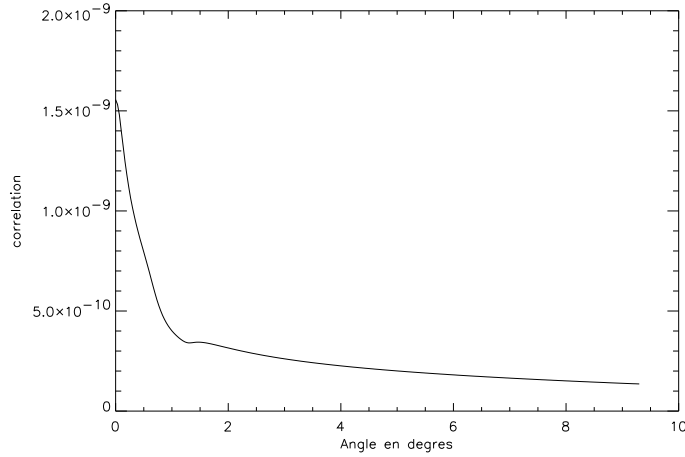


Fig. 5.2: Fonction de corrélation de CMB en fonction de l'angle γ calculée pour des paramètres standards : $H_0 = 65 \text{ k.s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, $\Omega_{\text{total}} = 1$, $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_{\text{baryon}} = 0,05$.

où P_ℓ est le polynôme de Legendre de degré ℓ .

En pratique, je calcule le spectre de puissance C_ℓ du CMB à partir des paramètres cosmologiques en utilisant le logiciel CMBFAST (Seljak et Zaldarriaga, 1996). La fonction de corrélation du CMB est déterminée en utilisant la relation 5.13. La figure 5.2 montre la fonction de corrélation en fonction de l'angle pour un jeu de paramètres standards qui sont : $H_0 = 65 \text{ km/s/Mpc}$, $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_b = 0.045$, $\Omega_\Lambda = 0.7$. L'amplitude moyenne du spectre de puissance est normalisée par la mesure COBE/DMR.

Le spectre de puissance des anisotropies $P(\vec{k})$ sur le domaine de la petite carte carrée est par définition :

$$P(\vec{k}) = \langle s(\vec{k}) \cdot s^*(\vec{k}) \rangle \quad (5.14)$$

En explicitant $s_{\vec{k}}$ en fonction de $s_{\vec{r}}$, à partir de la formule de la transformée de Fourier bidimensionnelle, on peut obtenir la relation suivante entre le spectre de puissance et la fonction de corrélation à deux points :

$$P(\vec{k}) = \left| \mathcal{F}_{2D} \{C(\gamma_p)\} \{ \vec{k} \} \right| \quad (5.15)$$

où $C(\gamma_p)$ est une carte de la fonction de corrélation, et γ_p la distance angulaire par rapport au centre de la carte, du pixel p de coordonnées \vec{r} .

La méthode de simulation de cartes d'anisotropies du CMB consiste dans un premier temps, à tirer dans chaque pixel de la carte un nombre aléatoire dont la variance vaut 1 et dont la statistique est Gaussienne. Dans l'espace de Fourier à deux dimensions, les pixels de la carte précédente, repérés par \vec{k} , sont ensuite multipliés par la racine de la valeur du spectre de puissance $P(\vec{k})$. La carte finale obtenue par transformée de Fourier inverse possède alors les propriétés souhaitées.

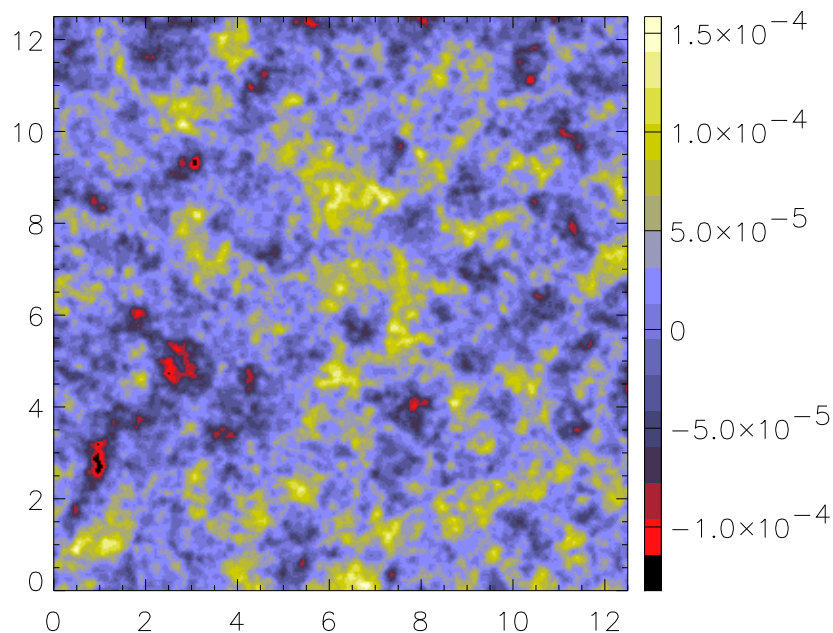


Fig. 5.3: Simulation des fluctuations du CMB sur une petite carte carrée de dimensions $12,5^\circ \times 12,5^\circ$, pour des paramètres cosmologiques standards. La carte compte 300×300 pixels. Des structures de taille 1° sont nettement visibles. Elles correspondent au premier pic acoustique dans le spectre de puissance.

Toutefois, il est important de noter que les cartes d'anisotropies simulées par cette méthode ne possèdent pas de structures à des échelles caractéristiques plus grandes que l'échelle couverte par la moitié de la carte. Aussi, en raison de la périodicité des fonctions orthonormées de la base de Fourier, la carte finale simulée est nécessairement périodique (elle forme un tore). Dans le but d'obtenir des simulations réalistes, nous produisons des cartes deux fois plus grandes que la taille souhaitée. Nous découpons ces cartes par la suite. La figure 5.3 montre une carte carrée d'anisotropies du CMB simulée avec cette technique. Le côté de la carte mesure $12,5^\circ$.

Rem : Bien que les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques a_{lm} du CMB sont indépendants, les modes de Fourier d'une petite carte carrée découpée sur le ciel sont forcément corrélés. Seules des cartes périodiques au niveau des bords peuvent avoir des coefficients de Fourier indépendants.

Carte de l'émission de la poussière

Afin d'obtenir une carte réaliste de l'émission de la poussière galactique, nous utilisons les mesures du satellite IRAS à la fréquence de 3000 GHz. Les différentes cartes observées sont accessibles sous la forme d'un catalogue (catalogue ISSA signifiant "IRAS Sky Survey Atlas"). Les cartes qui couvrent la région du ciel que l'on souhaite reconstruire sont découpées, recollées et repixellisées par interpolation à l'aide de polynômes de degré 5.

L'extrapolation de la carte reconstruite aux fréquences d'observation de Planck HFI est faite en supposant une loi d'émission qui ne varie pas en fonction de la région du ciel observée. Nous supposons la loi d'émission suivante (voir le chapitre II) :

$$T(\nu) = \nu^2 B_\nu(T = 17.5\text{K}) \quad (5.16)$$

Nous avons choisi pour les simulations d'observation de Planck HFI une région du ciel centrée sur $\alpha = 204$ degrés et $\delta = 11$ degrés en coordonnées équatoriales, proche de l'équateur écliptique ($\lambda = 198$ degrés et $\beta = 19,5$ degrés) et à haute latitude galactique (70 degrés). La figure 5.4 montre la carte d'émission de la poussière obtenue. La carte possède 300×300 pixels et a pour dimensions $12,5^\circ \times 12,5^\circ$.

*5.2.2 Simulation des séries temporelles de mesure**La technique de balayage*

Les cartes des anisotropies du CMB et de l'émission de la poussière thermique simulées sont mélangées afin obtenir une carte d'intensité du ciel dans les différentes bandes d'observation des détecteurs. Le mélange suit exactement le modèle décrit par l'équation 3.7. Ces cartes de composantes extrapolées sont réalisées pour les 48 détecteurs de l'instrument Planck HFI.

Dans le but d'inclure dans les simulations des effets instrumentaux qui varient naturellement dans le temps, et de prendre en compte les effets de reprojctions des séries temporelles sur les cartes finales, je procède en balayant les cartes mélangées des deux composantes simulées, tels que les instruments observeraient le ciel. Il est pour cela nécessaire de surpixelliser les cartes de composantes afin de réduire les effets de discrétisation des cartes initiales. Nous choisissons de travailler à une résolution 10 fois plus grande. Chaque point de mesure simulé en fonction du temps contient le signal de la carte initiale intégré sur l'ensemble des pixels couverts par le lobe du détecteur considéré, celui-ci est centré dans la direction de pointage. Le signal temporel relatif aux composantes astrophysiques extraites des cartes est, par cette procédure, dégradé aux résolutions angulaire des détecteurs. La figure 5.5 illustre la technique de balayage du ciel sur le domaine de notre petite carte carrée. La table

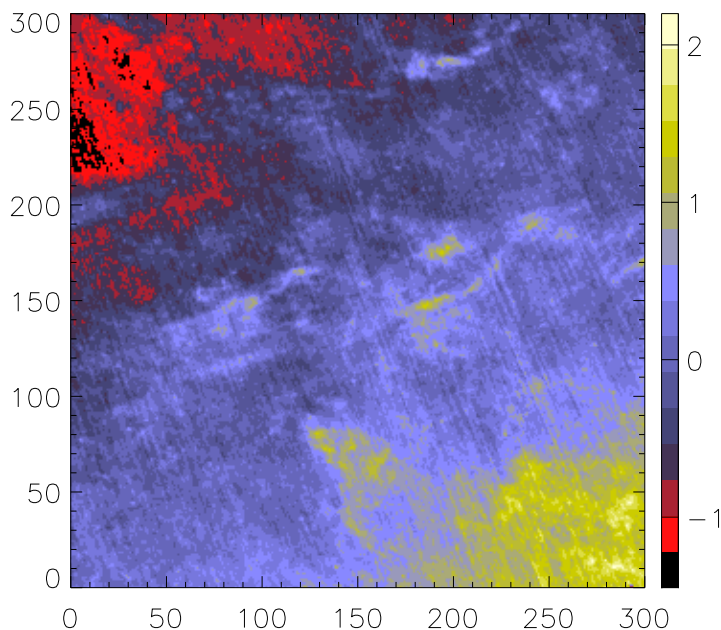


Fig. 5.4: Petite carte d'émission de la poussière galactique après reprojexion des cartes du catalogue ISSA. Chaque côté de la carte compte 300 pixels et a pour dimensions $12,5^\circ$. Les stries qui apparaissent sur la carte sont dues au bruit basse fréquence dans les données IRAS.

5.1 donne les paramètres de la stratégie de balayage et les paramètres de la carte couverte.

On a déjà montré que les différents détecteurs ne pointent pas dans la même direction au même instant. Nous tenons compte de ce décalage du pointage lorsque nous extrayons les séries temporelles des cartes de composantes.

Simulations du bruit instrumental

A chaque point de mesure des composantes en fonction du temps par chaque détecteur, dont on a décrit la procédure de simulation dans la partie précédente, on ajoute du bruit instrumental décorréolé entre les détecteurs. Les séries temporelles de bruit sont simulées en tirant aléatoirement les modes de Fourier avec une statistique Gaussienne de variance égale au spectre de puissance du bruit, qui prend la forme décrite dans l'équation 3.12 (bruit blanc + partie $1/f$). Les paramètres des spectres de bruit choisis sont présentés dans la table 5.2. Les détecteurs de Planck observeront soixante fois le même cercle sur le ciel avant que l'axe de rotation du satellite ne se

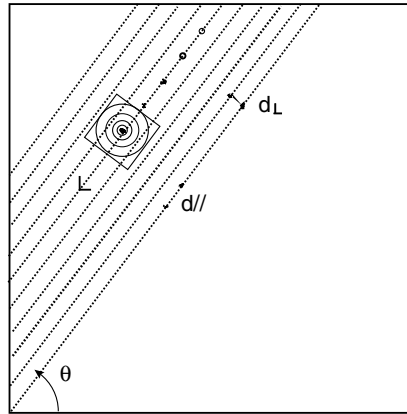


Fig. 5.5: Illustration de la technique de balayage du ciel. d_{\parallel} est la distance entre de points consécutifs de mesure, d_{\perp} est la distance séparant deux lignes consécutives de balayage.

Tab. 5.1: Stratégie d'observation et coordonnées des cartes

Fréquence d'échantillonnage en Hz	180
Fréquence de rotation en Hz	0,017
Vitesse de balayage en ' / s	360
Angle θ en degré	60
Coordonnée α de la carte en degré	204
Coordonnée δ de la carte en degré	11
Taille de la carte en degré	12,5
Taille d'un pixel en minute d'arc	2,5

décale. En faisant la supposition que les méthodes de fabrication de cartes ont permis de soustraire les dérives aux fréquences inférieures à la fréquence de rotation du satellite (voir la partie 3.2.3), nous simulons directement chaque grand cercle sur le ciel, en supposant que la moyenne sur les soixante cercles initiaux a été effectuée. Le spectre de puissance du bruit dans la simulations est donc soixante fois plus faible que le spectre nominal et la fréquence minimale de fluctuation du bruit est la fréquence de rotation du satellite.

On ajoute aussi aux séries temporelles un effet systématique. Supposons par exemple qu'il trouve son origine dans les fluctuations de température du miroir primaire. Comme nous l'avons déjà précisé, cet effet systématique sera observée par l'ensemble des détecteurs au même instant avec des amplitudes différentes. Nous caractérisons cet effet par le spectre de puissance suivant (dans les séries temporelles) :

$$P(f) = \begin{cases} A \left(\frac{f_0}{f} \right)^\alpha & \text{pour } f > f_{\text{rot}} \\ 0 & \text{pour } f < f_{\text{rot}} \end{cases} \quad (5.17)$$

Tab. 5.2: Paramètres de bruit dans les simulations pour chaque fréquence de Planck HFI. Il est nécessaire de multiplier par $\sqrt{2}$ la valeur de la NEP indiquée dans le cas où les bolomètres sont polarisés.

Fréquence en GHz	100	143	217	353	545	857
Constante NEP du bruit en $\mu K_{RJ}/\sqrt{\text{Hz}}$	50	40	30	25	15	10
f_{knee} en Hz	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
α du bruit	1	1	1	1	1	1

Tout comme pour le bruit, l'effet systématique est simulé en supposant une statistique Gaussienne.

Sa loi d'émission est modélisée par une loi de puissance :

$$I(\nu) \propto \nu^\beta \quad (5.18)$$

avec β variant typiquement entre 2 et 5. Nous choisissons l'indice spectral $\beta = 2.5$, c'est ce que l'on attend dans le domaine de fréquence considéré, pour un corps gris d'émissivité $\sqrt{\nu}$, tel que l'aluminium qui constitue les miroirs de Planck. Les paramètres que nous choisissons pour nos simulations de l'effet systématique sont donnés dans la table 5.3.

L'amplitude A_{sys} , donnée dans le tableau 5.3, est très supérieure d'un facteur 5

Tab. 5.3: Propriétés de l'effet systématique simulé

$\sqrt{A_{\text{sys}}}$ en $\mu K_{\text{CMB}}/\sqrt{\text{Hz}}$ à 200 GHz	30
f_0 en Hz	4.10^{-3}
α_{sys}	2
β_{sys}	2.5

environ par rapport à ce qui est attendu pour le satellite Planck. Nous avons choisi une valeur élevée dans le but de tester l'efficacité de la méthode de séparation de composantes.

5.2.3 Les cartes simulées

Les 48 séries temporelles (une pour chaque détecteur) simulées qui contiennent les composantes astrophysiques dégradées, le bruit et un effet systématiques, sont re-projetées sur les petites cartes carrées étant donné le pointage des différents détecteurs. Une simple moyenne est faite sur tous les points de mesure qui tombent dans le même pixel. La figure 5.6 montre une carte obtenue par fréquence de l'instrument HFI. La

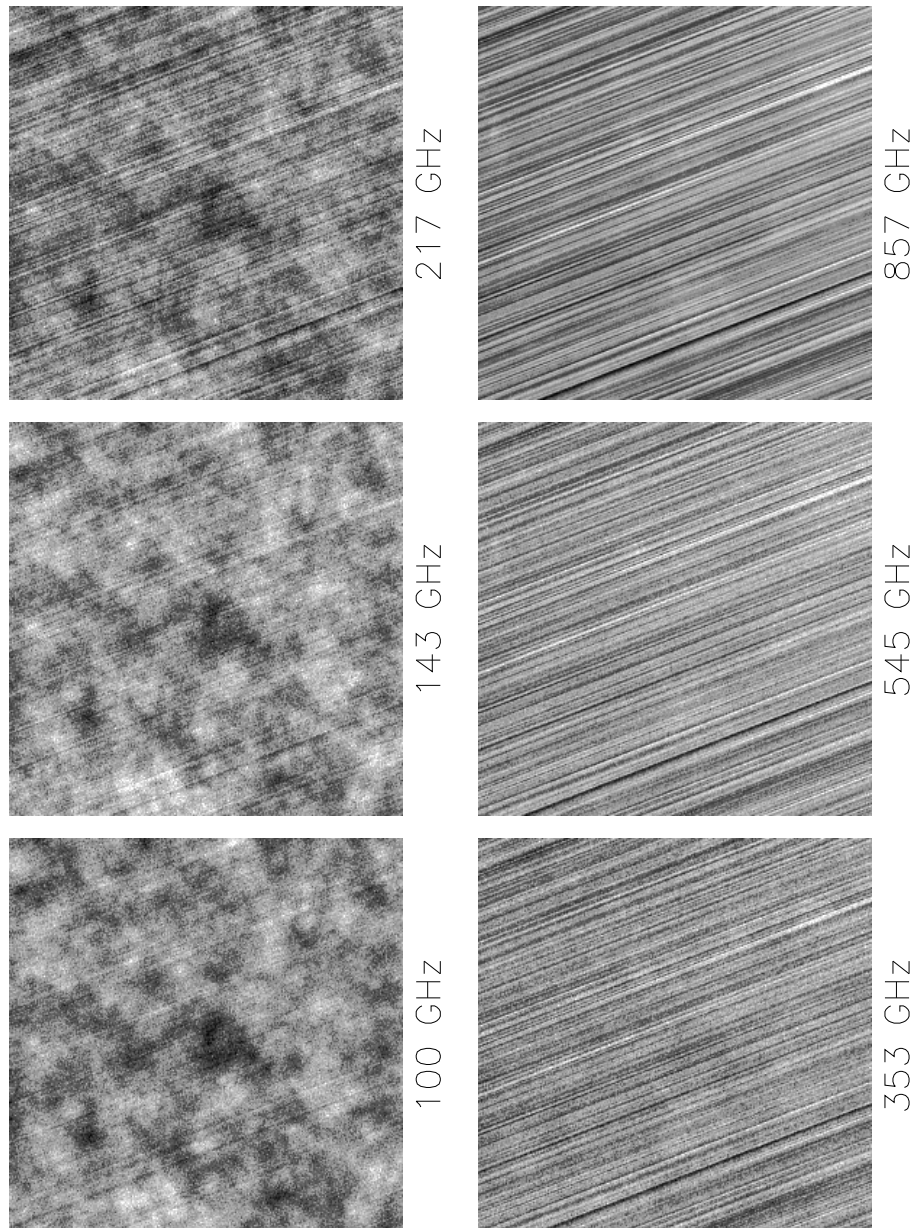


Fig. 5.6: Cartes d'observations obtenues après reprojexion des séries temporelles. Une carte d'observation d'un détecteur quelconque est montrée pour chaque fréquence. La composante systématique apparaît sous forme de stries dans les cartes. Elle est comparable au CMB à basse fréquence et domine par rapport à la poussière à haute fréquence. L'effet a été choisi volontairement extrêmement fort. Les anisotropies du CMB sont visibles aux fréquences entre 100 et 217 GHz.

figure 5.7 illustre le décalage sur le ciel de la composante systématique par rapport aux autres composantes qui sont d'origine astrophysiques, suivant la position des détecteurs dans le plan focal.

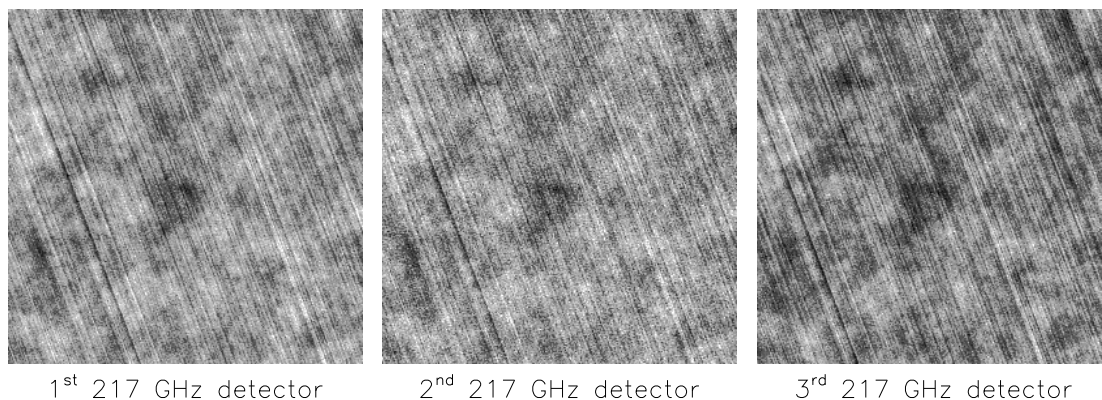


Fig. 5.7: Observations par trois différents détecteurs du canal à 217 GHz de Planck HFI. Le décalage sur les cartes de l'effet systématique est visible d'un détecteur à l'autre. On peut par exemple regarder la strie sombre dans le coin supérieur gauche de la carte.

5.3 Généralisation des méthodes de séparation de composantes - application aux données simulées.

Les méthodes de séparation de composantes que j'ai décrites dans le chapitre IV sont adaptés à la séparation des composantes astrophysiques. Dans cette section, je décris l'implantation de la méthode de Wiener pour la séparation de composantes, à la fois astrophysiques et systématiques, sur le domaine de petites cartes carrées où les lignes de balayage sur le ciel sont parallèles. Je présente les résultats obtenus après l'application de la méthode sur les simulations d'observation de Planck HFI que j'ai décrites dans la partie 5.2 (ce travail est exposé dans l'article Delabrouille et al. (2001)).

5.3.1 Implantation et application de la méthode de Wiener généralisée sur les simulations d'observations de Planck HFI

Rappel sur le modèle des cartes d'observations

Le modèle des observations sur le domaine de petites cartes carrées proche de l'équateur écliptique pour Planck HFI, en présence d'effets systématiques, est décrit

par les équations 5.8 et 5.9. Réécrivons ce modèle pour notre application à trois composantes, dont deux sont d'origine astrophysiques : le CMB et l'émission thermique de la poussière, et la troisième est d'origine instrumentale :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{y}_{m_d} \end{pmatrix}_{(\vec{k})} = \begin{pmatrix} a_{11}B_1(\vec{k}) & a_{12}B_1(\vec{k}) & r_{11}e^{2i\pi\vec{k}\vec{\Delta}p_1/N_p} \\ a_{21}B_2(\vec{k}) & a_{22}B_2(\vec{k}) & r_{21}e^{2i\pi\vec{k}\vec{\Delta}p_2/N_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m_d1}B_{m_d}(\vec{k}) & a_{m_dm_c}B_{m_d}(\vec{k}) & r_{m_d1}e^{2i\pi\vec{k}\vec{\Delta}p_{m_d}/N_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\text{CMB}} \\ \mathbf{s}_{\text{pous.}} \\ \mathbf{s}_{\text{sys.}} \end{pmatrix}_{(\vec{k})} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{n}_{m_d} \end{pmatrix}_{(\vec{k})} \quad (5.19)$$

Nous notons $\bar{A}(\vec{k})$ la matrice qui permet le passage entre les composantes et les observations dans la relation précédente. La première colonne de la matrice $\bar{A}(\vec{k})$ donne les coefficients de mélange relatifs à la composante CMB, la deuxième ceux relatifs à la composante poussière et la troisième correspond à la composante systématique. Arbitrairement, nous considérons que l'ensemble des composantes $\mathbf{s}(\vec{k})$ sont en unité de température CMB (voir 2.1.1) à la fréquence de 200 GHz. De plus, nous choisissons d'exprimer les cartes d'observation $\mathbf{y}(\vec{k})$ en MJy/Sr. Le choix des unités pour \mathbf{s} et \mathbf{y} permet de fixer la normalisation de la matrice de mélange. Dans ce cas, si l'on se réfère aux lois d'émissions des différentes composantes utilisées dans les simulations (voir le chapitre II), les coefficients de mélanges a_{ij} sont ceux répertoriés dans le tableau 5.4.

Tab. 5.4: Les paramètres de mélange a_{ij} utilisés pour les simulations.

	CMB	poussière	systématique
100 GHz	239	34.6	85.5
143 GHz	380	136	207
217 GHz	484	646	587
353 GHz	297	3666	1980
545 GHz	57.2	15190	5860
857 GHz	1.44	53200	18180

En raison de la présence d'exponentielles imaginaires dans la matrice de mélange $\bar{A}(\vec{k})$, cette dernière possède des coefficients complexes. Dans le but de manipuler

uniquement des grandeurs réelles, nous décomposons chaque paramètre en sa partie réelle et imaginaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_r + i\mathbf{y}_{im} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_r + i\mathbf{s}_{im} \quad (5.21)$$

$$\bar{A} = \bar{A}_r + i\bar{A}_{im} \quad (5.22)$$

Le système s'écrit

$$(\mathbf{y}_r + i\mathbf{y}_{im}) = (\bar{A}_r + i\bar{A}_{im}) \cdot (\mathbf{s}_r + i\mathbf{s}_{im}) + (\mathbf{n}_r + i\mathbf{n}_{im}) \quad (5.23)$$

$$= (\bar{A}_r\mathbf{s}_r - \bar{A}_{im}\mathbf{s}_{im}) + i(\bar{A}_r\mathbf{s}_{im} + \bar{A}_{im}\mathbf{s}_r) + (\mathbf{n}_r + i\mathbf{n}_{im}) \quad (5.24)$$

Nous pouvons finalement dédoubler chaque vecteur :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \mathbf{y}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_r & -\bar{A}_{im} \\ \bar{A}_{im} & \bar{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{im} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{n}_r \\ \mathbf{n}_{im} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Notons $\bar{\bar{A}}$ la nouvelle matrice de dimensions $(2 \times m_d) \times (2 \times m_d)$.

Implantation de la méthode de Wiener

La solution de Wiener, après séparation des parties réelles et imaginaires, s'écrit simplement pour chaque valeur de k de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{s}}_r(\vec{k}) \\ \hat{\mathbf{s}}_{im}(\vec{k}) \end{pmatrix} = [\bar{\bar{A}}^t(\vec{k})\bar{\bar{N}}_{\vec{k}}^{-1}\bar{\bar{A}}(\vec{k}) + \bar{\bar{C}}_{\vec{k}}^{-1}]^{-1} \bar{\bar{A}}^t(\vec{k})\bar{\bar{N}}_{\vec{k}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_r(\vec{k}) \\ \mathbf{y}_{im}(\vec{k}) \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

avec $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{N}}$ les spectres de puissance des parties réelles et imaginaires des composantes et du bruit. Ces matrices sont les suivantes :

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & \frac{C}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{N}} = \begin{pmatrix} \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Le facteur 1/2 provient du fait que la variance de la partie réelle ou imaginaire d'un coefficient complexe (de la transformée de Fourier des composantes et du bruit) est deux fois plus petite que la variance de ce dernier. De plus, les matrices $\bar{\bar{C}}$ et $\bar{\bar{N}}$ sont diagonales par "blocs" car on a supposé décorréler les parties réelles et imaginaires des coefficients de Fourier.

Le choix des a priori

On a vu que les *a priori* de la méthode de Wiener sont la matrice de mélange, les spectres de puissance des composantes et les spectres de puissance du bruit. La

matrice de mélange utilisée pour l'inversion est la matrice vraie décrite dans la table 5.4. Nous fixons le spectre *a priori* du CMB $C_{CMB}(\vec{k})$ à sa valeur théorique qui a été utilisée pour produire les simulations. Ensuite, nous fixons le spectre de puissance *a priori* de la poussière à $C_{pous.}(\vec{k}) = h |\vec{k}|^{-3}$, où h est une constante ajustée sur les cartes d'émission de la poussière mesurées par IRAS. Concernant l'effet systématique, nous prenons la moyenne des spectres de puissances empiriques obtenue sur dix réalisations de cartes d'effets systématiques, produites en utilisant les mêmes paramètres que dans les simulations (stratégie de balayage du ciel, ...). Enfin, les spectres de puissance du bruit sur les cartes d'observation sont déterminés en utilisant la même procédure que pour l'effet systématique.

L'apodisation

Dans le but de réduire les effets de bord sur les cartes dus à l'absence de périodicité¹, nous multiplions les cartes d'observation par une fonction d'apodisation qui s'annule pour les pixels situés aux bords. Cette fonction suit une forme sinusoïdale sur une demie période couvrant les “ T ” premiers pixels en partant du bord, et vaut 1 dans les régions centrales. Le décalage spatial de la composante systématique sur les cartes varie d'un détecteur à l'autre avec une amplitude de l'ordre de 15 pixels, pour des pixels de 2.5 minutes d'arc (cela correspond approximativement à la taille du plan focal), rendant impossible la séparation des composantes sur les bords. Pour cette raison, nous choisissons une largeur pour l'apodisation de $T = 15$ pixels.

5.3.2 Résultats

La figure 5.8 montre les résultats de l'inversion de Wiener à partir des 48 cartes d'observation simulées. Les trois cartes de composantes, le CMB, la poussière et l'effet systématique, sont bien reconstruites dans les régions centrales. Les composantes sont mal séparées aux bords, en raison de l'apodisation, mais aussi en raison du décalage de la composante systématique. L'erreur relative d'estimation est déterminée en mesurant la déviation standard de la carte de différence divisée par celle de la carte en entrée, en prenant uniquement la région centrale. L'erreur relative d'estimation du CMB est d'environ 14%, elle est d'environ 28% pour la poussière. Concernant l'effet systématique l'erreur relative est d'environ 13%.

Plusieurs effets sont à l'origine de cette erreur. Tout d'abord, les cartes estimées contiennent une contamination par le bruit des observations. Ensuite, il subsiste une contamination résiduelle par les autres composantes (voir partie 4.1.3 sur la méthode

¹ Si on referme les cartes sur elles-mêmes, des discontinuités apparaissent naturellement à l'emplacement des bords. Ces discontinuités peuvent introduire des effets indésirables pour l'analyse des coefficients de Fourier des cartes, puisque les fonctions de la base de Fourier sont toutes périodiques.

de Wiener). La troisième source d'erreur est le filtrage effectif des composantes par la méthode de Wiener. Afin d'isoler la part effective de bruit dans les cartes séparées, j'ai convolué chaque carte de composantes vraies avec le "lobe" effectif de Wiener donné par la relation 4.19, ce dernier dépendant de la composante considérée. L'erreur relative d'estimation mesurée en utilisant les cartes de composantes convoluées est d'environ 10% pour le CMB et 20% pour la poussière. Ces chiffres donnent directement la proportion de bruit dans cartes de composantes séparées.

La figure 5.9 montre les images des lobes effectifs des cartes des trois composantes obtenues avec la méthode de Wiener. La table 5.5 montre la largeur à mi-hauteur du lobe effectif dans les directions parallèle et perpendiculaire au balayage sur le ciel. Ce calcul est effectué pour chaque carte de composante astrophysique. Le lobe effectif de la carte de poussière est asymétrique car la composante systématique, fortement anisotrope, est dominante à haute fréquence d'observation. L'émission de la poussière et l'effet systématique sont en effet plus "difficiles" à séparer que les anisotropies du CMB et l'effet systématique, car leurs lois d'émission se ressemblent davantage. La dimension du lobe effectif des anisotropies du CMB est voisine de la résolution des détecteurs à 217 GHz. Ces détecteurs sont les plus performants quant à la mesure des anisotropies du CMB à petite échelle angulaire. La carte de poussière séparée possède une meilleure résolution car elle est dominante aux plus hautes fréquences d'observations. Les détecteurs correspondant ont une résolution angulaire de l'ordre de 5 minutes d'arc.

Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode de Wiener généralisée au traitement des effets systématiques dans le cas précis où les lignes de balayage sur le ciel sont parallèles, d'autant plus que cet effet a été volontairement choisi à un niveau très supérieur en comparaison au niveau attendu pour l'instrument Planck HFI.

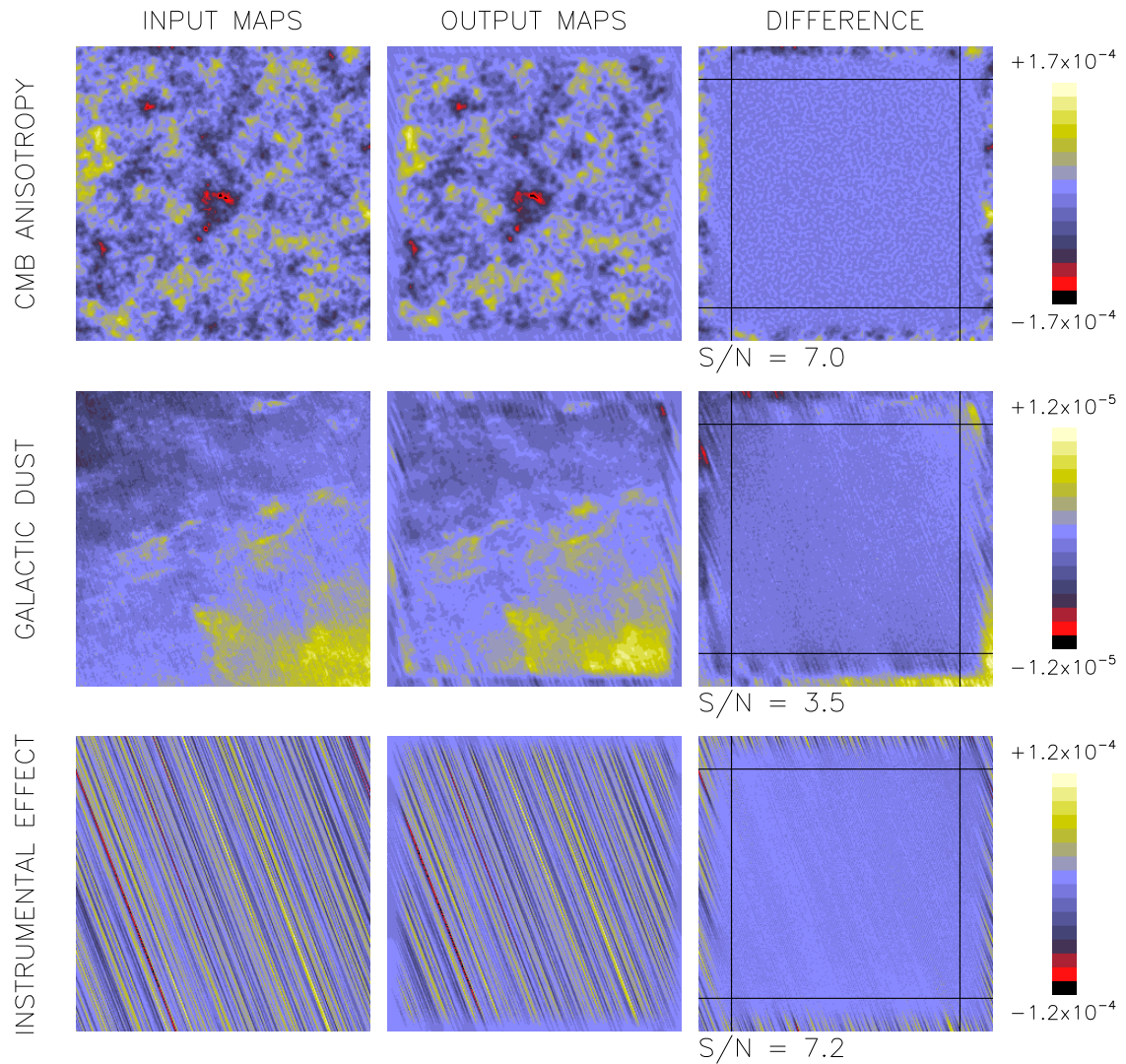


Fig. 5.8: Résultats de la séparation de composante avec la méthode de Wiener. Les cartes de composantes utilisées dans les simulations apparaissent dans la première colonne, la carte de composante systématique a été obtenue en projetant l'effet évoluant dans le temps en utilisant le pointage du centre du plan focal. Les cartes obtenues après inversion figurent sur la deuxième colonne. Les cartes de différences entre les composantes en entrée et sortie sont montrées dans la troisième colonne.

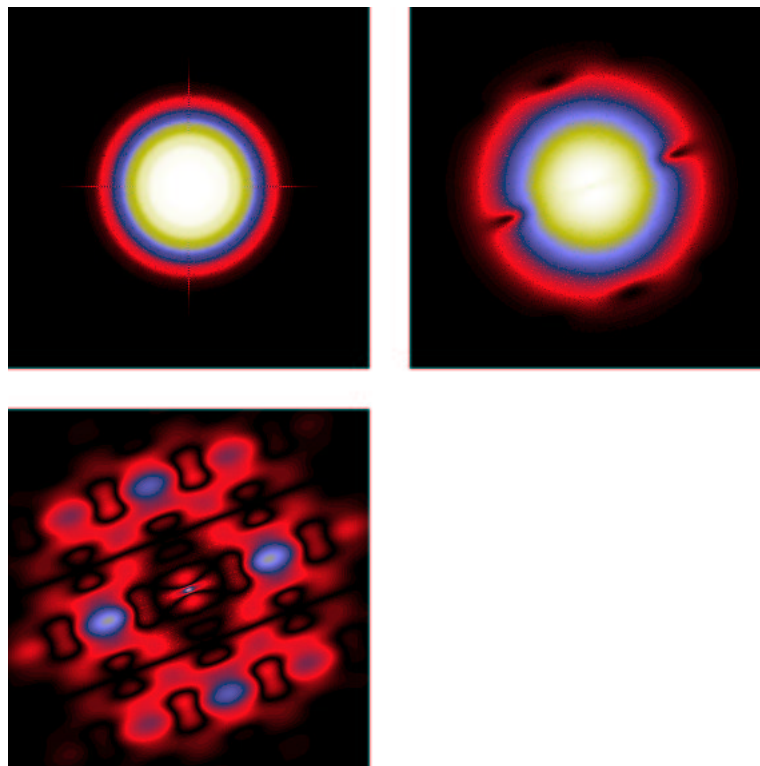


Fig. 5.9: Forme spatiale du filtre de Wiener pour chaque composante dans l'espace de Fourier. La première image correspond au lobe effectif de la composante CMB, les deuxième et troisième images à ceux des composantes poussière et systématique respectivement. Chaque carte a pour coté $\Delta\vec{k} = 2.51 \text{ arcmin}^{-1}$. L'origine $\vec{k} = 0$ est placée au centre des cartes. Les structures anisotropes qui apparaissent sur la fonction de transfert de l'émission de la poussière sont le reflet d'un filtrage plus intense dans les région du spectre où la composante systématique est plus fortes.

Tab. 5.5: Résolution des cartes de composantes après filtrage de Wiener dans les directions transverse et parallèle par rapport aux lignes de balayage du ciel.

Direction	au balayage	⊥ au balayage
CMB : FWHM en minutes d'arc	7,99	7,99
Poussière : FWHM en minutes d'arc	6.83	7.07

6. L'ESTIMATION SPECTRALE MULTI-DÉTECTEURS MULTI-COMPOSANTES

6.1 Introduction

La mesure du spectre de puissance des anisotropies est l'objectif majeur des différentes expériences dédiées à l'analyse du CMB. L'estimation spectrale est l'étape finale dans la chaîne de traitement des données, et arrive, selon les techniques d'analyse "classiques", juste après la séparation des composantes sur les cartes d'observation. Le spectre de puissance du CMB est mesuré sur la carte d'anisotropie du CMB reconstruite (voir par exemple Stolyarov et al. (2002)). Cette approche n'est pas entièrement satisfaisante pour plusieurs raisons.

- Tout d'abord, les méthodes de fabrication de cartes optimales (Wiener ou MEM) réalisent un filtrage des cartes aux fréquences spatiales contaminées par le bruit (voir chapitre IV). Il est donc nécessaire de corriger *a posteriori* de la fonction de transfert du filtrage les spectres de puissance estimés sur les cartes séparées (voir (Tegmark et Efstathiou, 1996), la méthode de Wiener redressée est présentée dans le chapitre IV).
- Ensuite, la carte d'anisotropies du CMB obtenue après séparation des composantes contient naturellement du bruit résiduel. Ce bruit comprend le bruit des détecteurs et les résidus des autres composantes (les composantes ne sont jamais parfaitement séparées avec la méthode de Wiener ou MEM, même si aucune erreur sur A n'est commise). Ces contaminations résiduelles sont particulièrement gênantes pour la mesure du spectre de puissance du CMB, comme nous allons l'illustrer. Notons ϵ la somme des résidus sur la carte de CMB séparée \tilde{s} . Elle s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$\tilde{s}(\vec{k}) = s(\vec{k}) + \epsilon(\vec{k}) \quad (6.1)$$

Le spectre de puissance de la carte s'écrit :

$$\tilde{C}_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} + \Sigma_{\vec{k}} \quad (6.2)$$

où $\Sigma = \langle \epsilon \epsilon^\dagger \rangle$. Ce résultat montre qu'il est nécessaire d'effectuer une soustraction du spectre de puissance du bruit résiduel pour obtenir une estimée non biaisée du spectre de puissance du CMB. En pratique, $\Sigma_{\vec{k}}$ peut être plus grand que $C_{\vec{k}}$, ainsi une petite erreur sur l'évaluation du bruit induit une erreur importante sur l'estimée de $C_{\vec{k}}$.

- Par ailleurs, les méthodes de séparation de composantes nécessitent la connaissance *a priori* des spectres électromagnétiques des composantes, ou plus directement de la matrice de mélange A . Or, nous avons vu dans le chapitre I que la dépendance en fréquences (électromagnétiques) de certaines composantes est très mal connue. Une erreur sur le choix des paramètres de mélange pourrait induire un biais dans la détermination du spectre de puissance du CMB.

Des méthodes de séparation de composantes "en aveugle" (permettant d'estimer la matrice de mélange A) ont été développées dans des contextes autres que la cosmologie. Ces méthodes ne sont pas adaptés à la séparation de composantes dans les

observations du CMB car elles négligent la présence de bruit dans les observations. Un travail en collaboration avec l'équipe de Ali Mohammad Djafari au LSS à Supelec (et notamment avec Hichem Snoussi, doctorant au LSS) a permis d'aboutir à une nouvelle approche de séparation de composantes en aveugle exploitant la diversité spectrale dans le cadre d'un modèle bruité des observations (Snoussi et al., 2001). Cette méthode supposait connu le spectre de puissance des composantes et possédait les deux premiers défauts des techniques classiques (nécessité de "débiaiser" le spectre de puissance estimé des effets de filtrage et de la contamination par le bruit). Toutefois, les niveaux de bruit dans les observations étaient estimés (le bruit était supposé blanc). La participation de Jean-François Cardoso de Télécom Paris à la continuation de ce travail nous a permis d'élargir l'approche précédente à l'estimation des spectre de puissance des composantes à l'aide d'une technique "évitant" le passage par des cartes de composantes pour estimer les paramètres d'intérêt (matrice de mélange, spectre des composantes, niveaux de bruit). Cette méthode s'est révélé être une technique d'estimation spectrale multi-composantes basée sur les spectres de puissance croisés entre les cartes d'observation (Cardoso et al., 2002). L'intérêt d'une telle technique est illustré par l'exemple suivant : Considérons le cas simple où les autres composantes astrophysiques sont négligeables devant les anisotropies du CMB et devant le bruit dans les observations. Comme dans la relation 6.2, les spectres de puissance des cartes d'observation sont la somme des spectres de puissance du signal et du bruit. Considérons deux détecteurs d et d' , le spectre de puissance croisé entre ces détecteurs s'écrit :

$$\langle y_d y_{d'}^\dagger \rangle = \langle s s^\dagger \rangle + \langle s n_{d'}^\dagger \rangle + \langle n_d s^\dagger \rangle + \langle n_d n_{d'}^\dagger \rangle \quad (6.3)$$

Si le bruit n'est pas corrélé entre les détecteurs ni avec le signal, on obtient :

$$\langle y_d y_{d'}^\dagger \rangle = \langle s s^\dagger \rangle . \quad (6.4)$$

Ainsi, la mesure des spectres croisés entre les différentes cartes donne une estimation non biaisée du spectre de puissance du CMB, si les hypothèses d'indépendance ci-dessus sont vérifiées. Une telle approche basée sur l'analyse des spectres croisés des cartes d'observation contenant une seule composante a été utilisée par la collaboration de l'expérience WMAP (Hinshaw et al., 2003). Si on considère maintenant l'ensemble des composantes astrophysiques, la mesure des spectres croisés donne accès à un mélange entre ces composantes.

Dans ce chapitre est décrite la méthode d'estimation spectrale multi-composantes en aveugle. La méthode présentée a été améliorée en différents points comparée à la version présentée dans l'article (Cardoso et al., 2002). En particulier, elle prend en compte l'effet du lobe des détecteurs qui peut être très différent d'une carte d'observation à une autre. De plus, elle permet d'estimer les spectres de puissance du bruit dans les cartes d'observation (des spectres de puissance blancs étaient initialement supposés). Aussi, la possibilité d'injecter des *a priori* physiques a été implémentée. Cela est

réalisé en fixant des paramètres dans la méthode (tels les paramètres de mélange des composantes bien connues). Nous verrons que cette procédure peut permettre de lever des dégénérescences inhérentes à la méthode (Patanchon et al., 2003). Nous allons tout d'abord décrire les principes de la méthode avant de présenter les résultats obtenus sur des simulations d'observations de Planck. Nous verrons quelles seront les contraintes qui peuvent être apportées sur le spectre de puissance du CMB et sur les autres composantes astrophysiques. Nous verrons aussi quels sont les avantages à ajouter certains *a priori* physiques sur les composantes.

6.2 Ajustement spectral multi-détecteurs multi-composantes

6.2.1 Statistiques spectrales

La méthode est basée sur l'ajustement des matrices de covariance spectrale mesurées à partir des cartes d'observation, avec leurs espérances calculées à l'aide du modèle des observations. Afin d'établir ces quantités, rappelons le modèle pour les coefficients de Fourier des cartes d'observations (nous avons déjà décrit ce modèle dans le chapitre III) :

$$\mathbf{y}(\vec{k}) = B_{\vec{k}} A \mathbf{s}(\vec{k}) + \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (6.5)$$

où $\mathbf{s}(\vec{k})$ est un vecteur contenant l'ensemble des composantes, $B_{\vec{k}}$ est une matrice contenant sur sa diagonale les fonctions de transfert des lobes des détecteurs, et $\mathbf{n}(\vec{k})$ le vecteur de bruit. Nous supposons que les composantes systématiques, sources de corrélation du bruit ont été soustraites. Définissons les coefficients $\mathbf{x}(\vec{k})$ par la relation : $\mathbf{x}(\vec{k}) = B_{\vec{k}}^{-1} \mathbf{y}(\vec{k})$, que l'on écrit explicitement pour la suite :

$$\mathbf{x}(\vec{k}) = A \mathbf{s}(\vec{k}) + B_{\vec{k}}^{-1} \mathbf{n}(\vec{k}) \quad (6.6)$$

L'introduction de ces coefficients (qui sont ceux de la transformée de Fourier des observations "déconvoluées") sera justifiée par la suite.

Les spectres de puissance des observations sont donnés par $R_x(\vec{k}) = \langle \mathbf{x}(\vec{k}) \mathbf{x}(\vec{k})^\dagger \rangle$. D'après l'équation 6.6, on obtient :

$$R_x(\vec{k}) = A C_{\vec{k}} A^t + B_{\vec{k}}^{-2} N_{\vec{k}} \quad (6.7)$$

On rappelle que $C_{\vec{k}}$ et $N_{\vec{k}}$ sont les spectres de puissance des composantes et du bruit respectivement. On suppose pour la suite qu'ils forment des matrices diagonales (on suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre les composantes et entre le bruit des différents capteurs). Les matrices de covariance spectrale des observations sont moyennées sur des domaines spectraux \mathcal{D}_q de forme quelconque dans l'espace de

Fourier, chaque domaine étant indexé par q :

$$R_x(q) = \frac{1}{n_q} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}_q} R_x(\vec{k}) \quad (6.8)$$

où n_q est le nombre de modes par domaine spectral. La relation précédente nous donne :

$$R_x(q) = AC(q)A^t + M(q) \quad (6.9)$$

où $M(q) = 1/n_q \sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}_q} B_{\vec{k}}^{-2} N_{\vec{k}}$ est aussi une matrice diagonale. L'intérêt de travailler avec les coefficients \mathbf{x} apparaît ici clairement. En effet, les matrices $R_x(q)$ et $R_x(\vec{k})$ ont une forme identique.

Ces matrices sont mesurées dans les données par :

$$\tilde{R}_x(q) = \frac{1}{n_q} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}_q} x(\vec{k}) x(\vec{k})^\dagger \quad (6.10)$$

La généralisation à l'analyse de la totalité de la sphère céleste

Le modèle des observations 6.6 est valable sur le domaine d'une petite carte du ciel pouvant être approximée par son plan tangent. Pour l'analyse de l'ensemble de la sphère céleste, la décomposition en harmoniques sphériques des cartes d'observation est approprié. (voir la partie 1.4.1 pour une description du formalisme des harmoniques sphériques). Le modèle peut être simplement généralisé aux coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques. Il s'écrit :

$$x(\ell, m) = As(\ell, m) + B(\ell)^{-1}n(\ell, m) \quad (6.11)$$

où $B(\ell)$ est une matrice diagonale dont les éléments $B_{dd}(\ell)$ sont les coefficients de l'expansion en polynômes de Legendre de la fonction spatiale du lobe du détecteur d . Nous avons supposé que le lobe est symétrique, et nous avons utilisé la propriété de transformation du produit de convolution dans l'espace réel en un produit classique dans l'espace des harmoniques sphériques. On a vu dans la partie 3.2.3 que si le lobe n'est pas symétrique, son effet ne peut pas être décrit comme une convolution du signal sur la sphère et il ne peut pas être factorisé dans l'espace de Fourier. Pour un lobe Gaussien, $b(\ell) \simeq \exp(-\sigma_b^2 \ell(\ell+1)/2)$ et $\sigma_b = \Theta_{\text{lobe}} \sqrt{8 \ln 2}$, où Θ_{lobe} est la largeur à mi-hauteur de la gaussienne, exprimée en radian.

Les spectres de puissance des observations sont calculés suivant les relations 6.8 et 6.10 (il convient juste de remplacer \vec{k} par (ℓ, m) dans les relations).

6.2.2 La méthode

L'objectif de la méthode MDMC est d'obtenir une estimée de plusieurs paramètres du modèle qui sont : les spectres de puissance des composantes moyennés sur des

domaines spectraux $C_{ii}(q)$, la matrice de mélange A , et les spectres de puissance moyennés du bruit $N_{jj}(q)$ (ou $M_{jj}(q) = B_{jj}^{-2}N_{jj}$). Notons l'ensemble de ces paramètres $\theta = \{A, C_{ii}(q), M_{jj}(q)\}$. On remarque que tous les paramètres apparaissent simplement dans l'expression des matrices de covariance spectrale déterminées à l'aide du modèle.

Une estimée de ces paramètres est obtenue en maximisant la vraisemblance des observations dans le cadre du modèle 6.6, si l'on suppose que les composantes et le bruit sont des réalisations de champs gaussiens stationnaires et en conséquence que les différents modes de Fourier sont décorrélés (il s'agit de l'approximation de Wittle). Nous allons montrer que le maximum de vraisemblance revient à ajuster les matrices de covariance spectrale mesurées avec leurs espérances. La vraisemblance s'écrit en fonction des paramètres θ :

$$p(x|\theta) = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{\det(2\pi R_x(\vec{k}))} \exp \left[-\mathbf{x}(\vec{k})^\dagger R_{x_{\vec{k}}}(\theta)^{-1} \mathbf{x}(\vec{k}) \right] \quad (6.12)$$

La log-vraisemblance s'écrit alors simplement :

$$\mathcal{L} = -\log p(x|\theta) = \sum_{\vec{k}} \mathbf{x}(\vec{k})^\dagger R_{x_{\vec{k}}}(\theta)^{-1} \mathbf{x}(\vec{k}) + \log \det(2\pi R_{x_{\vec{k}}}(\theta)) \quad (6.13)$$

En utilisant la propriété $\mathbf{x}^\dagger R^{-1} \mathbf{x} = \text{tr}(R^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger)$, on peut écrire \mathcal{L} en fonction des matrices de covariance spectrale :

$$\mathcal{L} = \sum_{\vec{k}} \left[\text{tr} \left(\tilde{R}_x(\vec{k}) R_x(\vec{k})^{-1} \right) + \log \det(R_x(\vec{k})) \right] + \text{cte} \quad (6.14)$$

Si on fait l'approximation que les matrices $\tilde{R}_x(\vec{k})$ et $R_x(\vec{k})$ sont constantes sur l'ensemble des modes \vec{k} appartenant à un même domaine spectral, on obtient :

$$\mathcal{L} = \sum_q n_q \left[\text{tr} \left(\tilde{R}_x(q) R_x(q)^{-1} \right) + \log \det(R_x(q)) \right] + \text{cte} \quad (6.15)$$

Ainsi, la vraisemblance prend la forme d'une mesure de "divergence" moyenne entre deux matrices, qui sont la matrice de covariance empirique et son espérance :

$$\mathcal{L} = \sum_q n_q D(\tilde{R}_x(q), R_x(q)) + \text{cte} \quad (6.16)$$

$D(., .)$ est la divergence de Kullback (1954) (voir aussi l'annexe B pour une description).

La solution $\hat{\theta}$ est telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta |_{\hat{\theta}}} = 0 \quad (6.17)$$

Il n'existe pas de solution analytique à cette relation. Nous avons recours à des algorithmes d'optimisation itératifs tels que l'algorithme EM (Expectation-Maximisation) et la méthode quasi-Newton. Nous décrirons ces algorithmes dans la prochaine section (6.2.3).

La variance de notre estimateur est asymptotiquement minimale car il s'agit du maximum de vraisemblance, et il est non-biaisé (voir le paragraphe "Choix des domaines spectraux").

Identifiabilité

Les composantes demeurent identifiables si les conditions suivantes sont respectées.

- Le bruit est décorréolé d'une carte d'observation à l'autre. Cette propriété est essentielle. Si elle n'est pas respectée, la reconstruction des paramètres relatifs aux composantes est affectée
- Les composantes sont indépendantes. Il s'agit d'une des hypothèses centrales de l'ensemble des méthodes de séparation de sources en aveugle.
- Les lois d'émission des composantes ne sont pas proportionnelles. Si deux composantes ont des spectres d'émission identiques, elles ne pourront pas être séparées en aveugle (elles forment une seule composante), mais cela n'affectera pas la reconstruction des autres composantes.
- Les composantes ont des spectres de puissance non proportionnels. Cette propriété (appelée diversité spectrale) est exploitée par notre méthode. Si deux composantes ont des spectres de puissance proportionnels, elles ne pourront pas être séparées, mais les autres composantes restent identifiables.

Ce dernier point peut être illustré en considérant le cas suivant : soient deux composantes gaussiennes i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées), par conséquent, ayant des spectres de puissances identiques. La matrice de covariance

$C_{\vec{k}} = \langle s(\vec{k}) s(\vec{k})^\dagger \rangle$ est alors donnée par $\sigma_k^2 Id$. Soit maintenant une combinaison linéaire des composantes $s'(\vec{k}) = R s(\vec{k})$. La covariance de cette combinaison linéaire s'écrit

$C'_{\vec{k}} = \langle s'(\vec{k}) s'(\vec{k})^\dagger \rangle = R \langle s(\vec{k}) s(\vec{k})^\dagger \rangle R^t = \sigma^2 R R^t$. Il existe une infinité de matrices R telles que $R R^t = Id$, c'est à dire telles que les nouvelles composantes soient indépendantes. Il s'agit de matrices de rotation. La matrice de mélange relative à des observations contenant un mélange de deux composantes iid est alors déterminée au mieux à une matrice de rotation près $\hat{A} = AR$. Cette matrice n'agit que dans le sous-espace engendré par les deux composantes iid. En ajoutant des *a priori* physiques sur

les composantes, il est possible, si nécessaire de lever cette dégénérescence.

Dégénérescences

On peut relever deux sortes d'indéterminations incontournables. La première concerne l'ordre des composantes. Il est impossible d'estimer la matrice de mélange A à mieux qu'une permutation de ses colonnes. Deuxièmement, un facteur d'échelle peut être échangé entre une composante s_i et la colonne i de la matrice de mélange sans changer la valeur de y . Il est donc impossible de déterminer ce facteur scalaire par notre méthode.

Choix des domaines spectraux

Nous supposons que les composantes sont isotropes sur le ciel. Dans ce cas, leurs spectres de puissance ne dépendent que de la norme du vecteur d'onde \vec{k} . Un choix naturel pour les domaines spectraux est alors d'utiliser des anneaux dans l'espace de Fourier de telle sorte que l'on moyenne des modes de Fourier à module de \vec{k} compris entre deux valeurs fixées. Dans le cas où on utilise le formalisme des harmoniques sphériques, on choisit des domaines spectraux qui couvrent l'ensemble des coefficients ayant des valeurs de ℓ comprises entre $\ell_{\min}(q)$ et $\ell_{\max}(q)$ (le spectre de puissance de cartes isotropes étant indépendant de m). Les matrices de covariance spectrale sont moyennées de la façon suivante :

$$R_x(q) = \frac{1}{n_q} \sum_{\ell=\ell_{\min}(q)}^{\ell_{\max}(q)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} R_x(\ell, m) \quad (6.18)$$

avec dans ce cas $n_q = (\ell_{\max}(q) + 1)^2 - \ell_{\min}(q)^2$. Si les composantes et aussi le bruit sont effectivement isotropes sur le ciel, et que l'on choisit des domaines spectraux de largeur $\Delta\ell = 1$, l'ajustement spectral nous fournit une solution optimale et non biaisée (asymptotiquement) sur l'ensemble des paramètres (à condition bien sûr que le modèle pour les composantes et le bruit soit respecté). En revanche, si nous choisissons $\Delta\ell > 1$, l'ajustement spectral n'est plus rigoureusement équivalent au maximum de vraisemblance, mais reste un estimateur non biaisé. Le fait de moyenner les spectres sur des "anneaux larges" a l'avantage de réduire le nombre de paramètres que l'on estime. Cette opération est même souhaitable si nous faisons l'hypothèse *a priori* que les spectres de puissance des composantes et du bruit varient peu sur chaque domaine spectral.

Choix des paramètres

L'ensemble des paramètres $\{A, C_{ii}(q), M_{jj}(q)\}$ peut être ajusté si les conditions d'identifiabilité sont respectées. Par ailleurs, certains de ces paramètres peuvent être très bien contraints par des expériences différentes, par la théorie ou par des méthodes différentes. C'est le cas par exemple des paramètres relatifs au spectre électromagnétique des anisotropies du CMB qui est donné par la dérivée d'une loi de corps noir. Ces paramètres sont reliés à une colonne entière de la matrice A à condition que les coefficients d'étalonnage des détecteurs soient très bien connus. Les paramètres bien contraints peuvent être fixés et la vraisemblance peut être maximisée par rapport aux autres paramètres.

Un autre exemple concerne les spectres de puissance du bruit qui parfois peuvent être supposés blancs. Dans ce cas, seul le niveau moyen du bruit est ajusté.

Si la matrice de mélange et les spectres de bruit sont parfaitement connus, l'ajustement se fait seulement par rapport aux spectres de puissance des composantes $C_{ii}(q)$. La méthode apparaît alors comme une technique de séparation des spectres de puissance.

L'approximation quadratique du critère

Le critère que nous minimisons, donné par l'expression 6.16, peut être approximé en faisant un développement limité au second ordre de la divergence de Kullback $D(\tilde{R}_x(q), R_x(q))$, quand $\tilde{R}_x(q)$ est proche de $R_x(q)$. Cela conduit à l'expression approchée de la divergence :

$$D(\tilde{R}_x, R_x) \simeq \text{tr} \left(R_x^{-1} (\tilde{R}_x - R_x) R_x^{-1} (\tilde{R}_x - R_x) \right) \quad (6.19)$$

On peut alors remplacer R_x^{-1} par \tilde{R}_x^{-1} et définir la quantité :

$$D_2(\tilde{R}_x, R_x) = \text{tr} \left(\tilde{R}_x^{-1} (\tilde{R}_x - R_x) \tilde{R}_x^{-1} (\tilde{R}_x - R_x) \right) \quad (6.20)$$

Le critère résultant $\Phi = \sum_q D_2(\tilde{R}_x(q), R_x(q))$ est particulièrement intéressant quand la matrice A est connue, car sa minimisation conduit à une solution analytique pour les spectres de puissance des composantes et du bruit. Il est plus simple, pour traiter ce problème, de représenter simplement le modèle des observations par une combinaison linéaire de composantes, les composantes de bruit ayant formellement le même statut que les composantes astrophysiques. Le modèle devient $x = A's'$ avec $s' = \{s_i, n_j\}$ et $A' = \{A; Id\}$. Les matrices de covariance spectrale théoriques sont $R_x = A'R_{s'}A'^t$ avec $diag R_{s'} = \{C_i, M_j\}$ (*diag* signifiant partie diagonale). La solution de $\partial\Phi/\partial(diag R_{s'}) = 0$ est :

$$diag \hat{R}_{s'}(q) = (A'^t R_x(q)^{-1} A')^{-2} diag(A'^t R_x(q)^{-1} A') \quad (6.21)$$

Si en revanche, la matrice de mélange n'est pas connue, il n'y a pas de solution analytique minimisant le critère Φ ci-dessus. On préfère dans ce cas utiliser le critère de divergence 6.16 car il peut être résolu en utilisant un algorithme EM.

6.2.3 La méthode de maximisation

Le critère 6.16 est maximisé à l'aide de deux algorithmes itératifs. Le premier est l'algorithme EM (Expectation-Maximisation). Il a l'avantage de garantir la convergence du critère. L'inconvénient est qu'il ne permet pas une convergence rapide. Le second est un algorithme quasi-Newton, optimal dans le cas d'un critère quadratique. Il nous permet d'accélérer la convergence du critère puisque son point de départ fourni par l'EM est relativement proche du minimum. Les valeurs initiales des paramètres θ_0 , avant l'étape EM peuvent être choisies de plusieurs façons. Une des possibilités est de se placer dans le cadre d'un modèle de mélange de composantes non bruité afin d'obtenir une estimée de A à partir d'une méthode de diagonalisation. Cette technique donne une première solution extrêmement simple. Les valeurs initiales du spectre de puissance des composantes $C_0(q)$ peuvent être obtenues à l'aide du calcul de la pseudo-inverse en utilisant A_0 . Les valeurs initiales du spectre de puissance du bruit $N_0(q)$ peuvent alors être mesurées sur les cartes résiduelles. Une autre possibilité est d'obtenir $C_0(q)$ et $N_0(q)$ en utilisant l'approximation quadratique du critère, qui offre comme on l'a vu une solution immédiate.

Nous allons maintenant décrire les deux algorithmes de maximisation.

L'algorithme EM

L'algorithme EM a été introduit pour la première fois par Dempster et al. (1977) (voir aussi pour une description détaillée McLachlan & Krishnan (1996)). Il s'agit d'une technique couramment utilisée en traitement du signal. Elle permet de maximiser de la vraisemblance pour des modèles à variables "cachées". Dans notre contexte, les variables cachées sont naturellement les composantes car elles n'apparaissent pas explicitement dans l'expression de la vraisemblance. L'EM est un algorithme itératif. En partant de valeurs initiales des paramètres, à chaque itération nous procédons en deux étapes :

- L'étape **E** : Calcul de la fonctionnelle EM : $Q(\theta, \theta^j)$, où θ^j est l'ensemble des paramètres obtenus à l'itération j .
- L'étape **M** : maximisation de la fonctionnelle EM pour obtenir un nouveau jeu de paramètres θ^{j+1} : $\partial Q(\theta, \theta^j) / \partial \theta_{|\theta^{j+1}} = 0$

Considérons la probabilité $p(x, s|\theta)$ à la fois des composantes et des observations étant donné un jeu θ de paramètres. La log-vraisemblance est donnée par :

$$\mathcal{L}(\theta) = \log p(x|\theta) = \log \int p(x, s|\theta) ds \quad (6.22)$$

La maximisation de la vraisemblance est rendue plus simple en considérant la fonctionnelle EM :

$$Q(\theta, \theta') = \int \log(p(x, s|\theta))p(s|x, \theta') ds \quad (6.23)$$

Soit θ'' un nouveau jeu de paramètres, soit θ' le jeu de paramètres à l'itération précédente. On peut prouver que si $Q(\theta'', \theta') > Q(\theta', \theta')$ alors $\mathcal{L}(\theta'') > \mathcal{L}(\theta')$ (voir annexe A). Ainsi, si on maximise $Q(\theta, \theta')$ par rapport à θ alors la vraisemblance évaluée pour le nouveau jeu de paramètres est augmentée. Donc à chaque itération de l'EM la vraisemblance augmente rigoureusement.

Les deux étapes E et M offrent dans notre problème des solutions immédiates. L'équation que l'on cherche à résoudre est :

$$0 = \frac{\partial Q(\theta, \theta_k)}{\partial \theta} \Big|_{\theta^{k+1}} = \int \frac{\partial \log(p(x, s|\theta^{k+1}))}{\partial \theta} p(s|x, \theta^k) ds \quad (6.24)$$

qui s'écrit en fonction de \vec{k} (on rappelle que l'on a supposé les modes de Fourier indépendants) :

$$0 = \sum_{\vec{k}} \int \frac{\partial \log(p(x(\vec{k}), s(\vec{k})|\theta^{k+1}))}{\partial \theta} p(s(\vec{k})|x(\vec{k}), \theta^k) ds \quad (6.25)$$

$$= \sum_{\vec{k}} E \left\{ \frac{\partial \log(p(x(\vec{k}), s(\vec{k})|\theta^{k+1}))}{\partial \theta^k} \Big| x(\vec{k}), \theta^k \right\} \quad (6.26)$$

Ecrivons les expressions du logarithme des probabilités $p(x, s|\theta)$ et $p(s|\theta)$ (pour mémoire $\theta = \{A, C_{ii}(q), M_{jj}(q)\}$) :

$$-2 \log p(x, s|\theta) = (x - As)^\dagger M^{-1} (x - As) + \log \det M + \text{cte} \quad (6.27)$$

$$-2 \log p(s|\theta) = s^\dagger C^{-1} s + \log \det C + \text{cte} \quad (6.28)$$

Sachant que $p(x, s) = p(x|s)p(s)$, les espérances des dérivées de $\log p(x, s|\theta)$ par rapport aux paramètres θ , qui interviennent dans l'expression 6.26 sont les suivantes (on ne précise pas la dépendance en \vec{k} de x et s pour alléger les notations) :

$$E \left\{ \frac{\partial \log p(x, s|\theta)}{\partial A} \Big| x, \theta^k \right\}_{\vec{k}} = M(q)^{-1} E\{[(x - As)s^\dagger]\} \quad (6.29)$$

$$E \left\{ \frac{\partial \log p(x, s|\theta)}{\partial M(q)^{-1}} \Big| x, \theta^k \right\}_{\vec{k}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}[E\{(x - As)(x - As)^\dagger\} - M(q)] & \text{si } \vec{k} \in \mathcal{D}_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.30)$$

$$E \left\{ \frac{\partial \log p(x, s|\theta)}{\partial C(q)^{-1}} \Big| x, \theta^k \right\}_{\vec{k}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}[E\{ss^\dagger\} - C(q)] & \text{si } \vec{k} \in \mathcal{D}_q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.31)$$

Afin de résoudre les équations ci-dessus, il est nécessaire de calculer les espérances des quantités aléatoires s et ss^\dagger . La première est donnée par :

$$E\{s|x, \theta\} = W(\theta)x \quad (6.32)$$

il s'agit de la solution de Wiener décrite dans la partie 4.1.3, la matrice de Wiener étant : $W = (A^t M^{-1} A + C)^{-1} A^t M^{-1}$. La seconde s'écrit :

$$E\{ss^\dagger|x, \theta\} = E\{s|x, \theta\}E\{s|x, \theta\}^\dagger + Cov\{s|\theta\} \quad (6.33)$$

$$= W(\theta)xx^\dagger W(\theta)^t + M_{cov}(\theta) \quad (6.34)$$

avec $M_{cov} = (A^t M^{-1} A + C)^{-1}$. D'après la relation 6.26, à l'aide des équations 6.29, 6.30, 6.31 et en utilisant les expressions des espérances ci-dessus, on obtient le système d'équations suivant :

$$0 = \sum_q n_q M(q)^{-1} (W(q, \theta^k)^t \tilde{R}_{xx}(q) - A R_{ss}(q)) \quad (6.35)$$

$$0 = \tilde{R}_{xx}(q) - 2AW(q, \theta^k) \tilde{R}_{xx}(q) + AR_{ss}(q, \theta^k)A^t - M(q) \quad (6.36)$$

$$0 = R_{ss}(q, \theta^k) - C(q) \quad (6.37)$$

avec :

$$R_{ss}(q, \theta^k) = W(q, \theta^k) \tilde{R}_{xx}(q) W(q, \theta^k)^t + Cov(q, \theta^k) \quad (6.38)$$

Les équations ci-dessus ont été obtenues sans que l'on n'ait imposé de contraintes sur les matrices A , $M(q)$ et $C(q)$. Or dans notre modèle, les matrices $M(q)$ et $C(q)$ sont diagonales. Ces contraintes préservent la forme simple des équations, il suffit seulement de prendre les parties diagonales des relations 6.36 et 6.37. Ainsi, l'estimée du spectre de puissance moyenné des composantes à l'itération $k + 1$ est obtenue simplement :

$$C_{ii}(q)^{k+1} = [R_{ss}(q, \theta^k)]_{ii} \quad (6.39)$$

En revanche, la solution pour la matrice de mélange et les spectres de bruit n'est pas immédiate car les équations 6.35 et 6.36 sont couplées. Nous avons plusieurs possibilités pour résoudre ce problème à moindre coût par des approximations. La plus simple est de remplacer $M(q)$ dans la relation 6.35 par son estimée à l'itération précédente. La solution pour A^{k+1} est la suivante :

$$A_{ij}^{k+1} = \frac{\left\{ \sum_q n_q (M^k(q))^{-1} W(q, \theta^k)^t \tilde{R}_{xx}(q) \right\}_{ij}}{\left\{ \sum_q n_q [R_{ss}(q, \theta^k) \otimes (M^k(q))^{-1}] \right\}_{ij}} \quad (6.40)$$

où \otimes est le produit de Kroeneker entre deux matrices définit par :

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{10} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \otimes H = \begin{pmatrix} g_{00}H & g_{10}H \\ g_{01}H & g_{11}H \end{pmatrix}$$

La relation 6.36 donne alors une solution immédiate pour $M(q)^{k+1}$ en fonction de A^{k+1} :

$$M_{jj}(q)^{k+1} = [\tilde{R}_{xx}(q) - 2AW(q, \theta^k)\tilde{R}_{xx}(q) + AR_{ss}(q, \theta^k)A^t]_{jj} \quad (6.41)$$

Le problème de cette approche est que l'augmentation de la vraisemblance à chaque itération n'est plus garantie. La deuxième possibilité est de procéder à chaque itération en deux étapes EM successives. On peut résumer cette approche de la façon suivante :

- étape E (1) : calcul des matrices W , Cov et R_{ss} en fonction des paramètres de l'itération précédente A^k , $C_{ii}(q)^k$ et $M_{jj}(q)^k$.
- étape M (1) : maximisation de la fonctionnelle EM par rapport à A et $C_{ii}(q)$ afin d'obtenir A^{k+1} et $C_{ii}(q)^{k+1}$.
- étape E (2) : calcul des matrices W , Cov et R_{ss} en fonction de A^{k+1} , $C_{ii}(q)^{k+1}$ et $M_{jj}(q)^k$.
- étape M (2) : maximisation de la fonctionnelle EM par rapport à $M_{jj}(q)$ afin d'obtenir $M_{jj}(q)^{k+1}$.

Cette approche est celle que nous adoptons car à l'issue de chaque étape M, la vraisemblance ne peut qu'augmenter.

Il est nécessaire de fixer l'indétermination d'échelle des composantes (voir la section 6.2.2) pour que l'EM converge. Nous levons cette dégénérescence en fixant à chaque itération la norme de chaque colonne de A à l'unité. La normalisation des spectres de puissance des composantes est ajustée en conséquence.

La méthode quasi-Newton

La méthode quasi-Newton est utilisée après plusieurs itérations de l'algorithme EM dans le but de terminer la convergence de notre critère, ce dernier ayant été relativement bien approché. Cette étape d'optimisation non-linéaire se révèle nécessaire car l'algorithme EM, au bout de quelques itérations, rentre dans une phase de convergence lente. Ce comportement de l'EM est dû à la présence de paramètres très mal contraints dans les données, en compétition avec des paramètres extrêmement bien mesurés.

Nous avons opté pour l'algorithme classique BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shapiro) (Luenberger, 1973). Cette technique permet de minimiser notre critère en faisant des minimisations successives unidimensionnelles suivant différentes directions dans l'espace des paramètres. À chaque itération, la direction \vec{d} de minimisation est déterminée

par le gradient du critère multiplié par une estimée de l'inverse du hessien :

$$d_i = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} [\hat{H}^{-1}]_{ij}, \quad (6.42)$$

le hessien H étant défini par $H_{ij} = \partial^2 \mathcal{L} / \partial \theta_i \partial \theta_j$. La direction \vec{d} déterminée par la relation précédente, est celle du minimum si \mathcal{L} est quadratique. On espère ainsi une convergence rapide de notre critère puisque l'algorithme EM nous donne un point d'entrée relativement proche du minimum, la fonction \mathcal{L} étant bien approchée par une forme quadratique. Le calcul du hessien (l'équation 6.50 en est une forme approchée) est assez coûteux. Pour cette raison, il n'est pas déterminé à chaque itération mais seulement pour le point initial de l'algorithme (il est parfois judicieux pour des raisons de convergence d'adopter une forme approchée du hessien). Nous le réactualisons à l'itération suivante à l'aide d'une relation qui dépend de la dérivée du critère. On peut montrer qu'au fil des itérations, le hessien estimé par cette méthode converge vers sa valeur vraie. En pratique, l'algorithme BFGS nécessite seulement l'évaluation du critère et de ses dérivées en fonction des paramètres. Ces dernières sont calculées à partir de la relation suivante (obtenue à l'aide de 6.15) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_x} = R_x^{-1} (R_x - \tilde{R}_x) R_x^{-1}. \quad (6.43)$$

On en déduit ainsi :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \sum_q n_q R_x^{-1} (R_x - \tilde{R}_x) R_x^{-1} AC(q) \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = A^t R_x^{-1} (R_x - \tilde{R}_x) R_x^{-1} A \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = R_x^{-1} (R_x - \tilde{R}_x) R_x^{-1} \quad (6.46)$$

La dégénérescence due à l'indétermination d'échelle des composantes est fixée dans l'algorithme de BFGS en pénalisant la norme de chaque colonne de la matrice de mélange. La valeur de la norme la plus probable est l'unité.

Nous choisissons d'arrêter l'algorithme lorsque la valeur du gradient (normalisé par le hessien), projeté dans la direction de minimisation, est inférieure à une constante arbitraire très inférieure à 1.

6.2.4 Prédiction des erreurs et de la qualité de l'ajustement

La variance d'estimation des différents paramètres étant asymptotiquement minimale, elle est bien approchée, d'après le théorème de Fisher, par la relation suivante :

$$E\{(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^t\} = 2I(\theta_0)^{-1} \quad (6.47)$$

où θ est la valeur vraie des paramètres et $I(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher. Le facteur 2 vient du fait que le nombre de points de mesure indépendants pour le calcul des matrices de covariance spectrale est le nombre total de coefficients de Fourier divisé par 2. En effet, pour que les cartes d'observation soient réelles, nous avons la condition $\mathbf{x}(-\vec{k}) = \mathbf{x}(\vec{k})^\dagger$. La matrice d'information de Fisher est donnée par :

$$I(\theta_0) = E \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_0} \right\} \quad (6.48)$$

En pratique, nous évaluons les erreurs d'estimation de nos paramètres par l'expression suivante :

$$\hat{E} = 2 \operatorname{diag} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \right]_{|\hat{\theta}}^{-1} \quad (6.49)$$

Nous utilisons une forme approchée (on suppose que $R_x(\theta_0)$ est voisin de \tilde{R}_x) pour la dérivée seconde du critère par rapport aux paramètres :

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta^2} \right]_{ij} \simeq \sum_q n_q \operatorname{tr} \left\{ R_x^{-1} \frac{\partial R_x}{\partial \theta_i} R_x^{-1} \frac{\partial R_x}{\partial \theta_j} \right\} \quad (6.50)$$

Une des difficultés est que la matrice décrite ci-dessus n'est pas inversible. Ceci est dû à la dégénérescence entre la norme de chaque colonne de la matrice de mélange et l'amplitude des spectres de puissance des composantes. Nous faisons le choix de fixer à l'unité un des paramètres de chaque colonne de la matrice de mélange. Les paramètres de référence que l'on choisit sont ceux qui correspondent aux détecteurs où les composantes ont un meilleur rapport signal sur bruit. L'amplitude des spectres de puissance des composantes est ajustée en conséquence. En pratique, la matrice 6.50 est calculée pour un nombre plus restreint de paramètres avant d'être inversée (on supprime les lignes et les colonnes qui correspondent aux paramètres références). Les erreurs calculées de cette manière sont des erreurs relatives (voir la partie 6.2.5 dans laquelle est discuté l'étalonnage des observations par la méthode). Cette façon de procéder a l'avantage d'être simple, mais il serait probablement plus adéquat de recalibrer les éléments de la matrice de mélange par rapport aux variances estimées des composantes, qui sont données par les intégrales de leurs spectres de puissance.

Tests de la cohérence des données avec le modèle

Nous avons vu qu'en $\theta = \hat{\theta}$, la divergence de Kullback entre les matrices de covariance spectrale du modèle et leurs espérances, moyennée sur l'ensemble des domaines spectraux, est minimale. On note Φ cette quantité : $\Phi = \sum_q 2n_q D(\tilde{R}_x(q), R(q, \theta))$; $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\hat{\theta}} = 0$ (on rappelle que n_q est le nombre de modes appartenant à la bande spectrale q). Pour le cas idéal où le modèle est représentatif des données, l'espérance de

Φ vérifie :

$$E\{\Phi\} = N_{DL} \quad (6.51)$$

où N_{DL} est le nombre total de degrés de libertés. Ce dernier est égal au nombre de points de mesure (N_{mes}) auquel on retranche le nombre total de paramètres ajustés (N_p). Notons pour la suite N_d le nombre de détecteurs, Q le nombre de bandes spectrales et N_c le nombre de composantes.

- N_{mes} est le nombre d'éléments "indépendants" des matrices de covariance spectrale (qui sont symétriques) :

$$N_{mes} = \frac{N_d \times (N_d + 1)}{2} \times Q \quad (6.52)$$

- N_p est donné par le nombre d'éléments de la matrice de mélange ajustés, plus le nombre de paramètres relatifs aux spectres de puissance des composantes et du bruit.

$$N_p = (N_d - 1) \times N_c + (N_c + N_d) \times Q \quad (6.53)$$

Le calcul de la quantité Φ permet ainsi d'évaluer la qualité de l'ajustement des paramètres du modèle aux données.

Cette mesure de la performance peut aussi être réalisée pour chaque bande spectrale q individuellement. Soit $\Phi(q) = 2n_q D \left(\tilde{R}_x(q), R_x(q, \theta) \right)$. Si l'ajustement du modèle sur les données est acceptable, une relation analogue à 6.51 doit être vérifiée pour chaque bande spectrale :

$$E\{\Phi(q)\} = N_{DL}(q) \quad (6.54)$$

Toutefois, le nombre de degrés de liberté $N_{DL}(q)$ n'est pas parfaitement défini puisque les paramètres du modèle sont ajustés sur l'ensemble des domaines spectraux. C'est le cas plus particulièrement des paramètres de mélange des composantes. Supposons que $Q \gg 1$, et ainsi que les mesures correspondant à une valeur de q quelconque possèdent un poids négligeable dans l'évaluation des paramètres de mélange. Nous pouvons alors négliger ces derniers pour l'évaluation du nombre de degrés de liberté par bande spectrale. Nous devrions alors vérifier :

$$\Phi(q) \sim \frac{N_d \times (N_d + 1)}{2} - (N_d + N_c) \quad (6.55)$$

La quantité ci-dessus possède une distribution semblable à une distribution de χ^2 à N_{DL} degrés de libertés. Cela donne une idée de la dispersion attendue des valeurs $\Phi(q)$ obtenues sur l'ensemble des bandes spectrales q . La mesure de $\Phi(q)$ permet ainsi

de repérer des problèmes éventuels dans les données et les domaines spectraux pour lesquels ces problèmes interviennent.

Une mesure de la performance peut être réalisée pour un nombre plus restreint de détecteurs. Le critère $\bar{\Phi}(q)$ peut être défini à partir de la divergence de Kullback entre les matrices de covariance spectrale calculées uniquement pour le jeu de détecteurs que l'on choisi de tester (toujours en $\hat{\theta}$ déterminé en faisant l'ajustement global avec la totalité des détecteurs). Ce critère doit vérifier la relation 6.55. Comme précédemment, la difficulté réside dans l'évaluation du nombre de degrés de liberté. Faisons l'hypothèse que le nombre de détecteurs \bar{N}_d considérés pour l'évaluation de la divergence de Kullback est faible comparé au nombre total de détecteurs. Nous faisons l'approximation que les détecteurs considérés contribuent avec un poids négligeable dans l'évaluation des paramètres relatifs aux composantes et au bruit des autres détecteurs. Ainsi, seuls les paramètres de bruit relatif à cette combinaison de détecteurs sont ajustés. Dans ce cas, le nombre total de degrés de liberté "effectifs" peut être approximé par :

$$\bar{N}_{\text{DL}}(q) \simeq \frac{\bar{N}_d(\bar{N}_d + 1)}{2} - \bar{N}_d \quad (6.56)$$

Il peut s'avérer particulièrement intéressant de d'évaluer la divergence de Kullback obtenue pour chaque paire de détecteurs. Cela peut permettre d'isoler ceux qui éventuellement posent problème. Dans ce cas particulier, d'après la relation 6.56, le nombre de degré de liberté "effectif" n'est que de 1. Nous nous attendons ainsi à ce que de nombreuses valeurs du critère d'ajustement $\bar{\Phi}_{\text{paire}}(q)$ soient proches de 0 (la distribution des valeurs de $\bar{\Phi}_{\text{paire}}(q)$ est semblable à une distribution de χ^2 à 1 degré de liberté). Ce critère de qualité d'ajustement sera utilisé à l'issue de l'application de la méthode aux données de la mission ballon Archeops dans le chapitre VII.

6.2.5 Les applications de la méthode MDMC

Il existe de nombreuses applications de la méthode MDMC pour l'analyse des cartes d'observation dans le domaine de fréquence des anisotropies du CMB. Les principales applications sont les suivantes :

- **La mesure des spectres de puissance des composantes.** Il s'agit bien sûr de l'application majeure de la méthode MDMC. Tout d'abord, la méthode permet d'exploiter efficacement l'information des spectres de puissance croisés des différentes cartes d'observation. Elle permet ainsi de s'affranchir du biais introduit par le bruit. Ensuite, elle permet de séparer efficacement les émissions astrophysiques d'avant-plan (à condition qu'elles satisfassent le modèle simple 3.2) et ainsi d'exploiter des régions du ciel fortement contaminées (comme les régions proches du plan galactique). La séparation des spectres de puissance des composantes est réalisée même si les lois

d'émission des composantes sont mal connues, puisque la matrice de mélange est estimée.

- **Contraindre les spectres électromagnétiques des composantes.** L'estimation de la matrice de mélange permet d'apporter des mesures des spectres d'émission des composantes aux différentes fréquences d'observation. Pour cela, il est nécessaire que les observations soient bien étalonnées. Il s'agit d'une application particulièrement intéressante pour l'analyse et la compréhension des composantes galactiques qui seront observées par le satellite Planck (voir la partie 6.3.2 où sont présentées les performances de la méthode).

- **La détection de composantes faibles.** La méthode nécessite en pratique la connaissance du nombre de composantes présentes dans les observations. Ce nombre peut être estimé en appliquant la méthode à plusieurs reprises en augmentant au fur et à mesure le nombre de composantes recherchées. Lorsque ce nombre devient suffisamment important, les composantes "réelles" deviennent stables et des composantes de bruit apparaissent. La méthode peut alors permettre de détecter des composantes faibles dans les données.

- **L'étalonnage des détecteurs.** Comme on l'a vu dans le chapitre III, les éléments de la matrice de mélange dépendent des coefficients d'étalonnage des détecteurs. Si plusieurs détecteurs observent le ciel à la même fréquence, la méthode, utilisée en aveugle, peut permettre une mesure de leurs coefficients d'étalonnage relatif. En particulier, la méthode peut être appliquée directement sur des cartes d'observation non-étalonnées, exprimées dans les unités pertinentes délivrées par l'électronique de lecture. Comme les anisotropies du CMB ont une dépendance en fonction de la fréquence parfaitement connue (dérivée d'une loi de corps noir), cette information peut être utilisée pour étalonner les détecteurs qui observent le ciel à des fréquences différentes (il s'agit toujours d'un étalonnage relatif). Un étalonnage absolu est obtenue seulement si une composante possède un spectre et une amplitude connue.

- **La séparation des composantes.** La méthode d'estimation spectrale MDMC fournit une estimée de l'ensemble des paramètres requis par les méthodes classiques de séparation de composantes (voir la partie 4.1). Des cartes de composantes peuvent être produites simplement en appliquant une de ces méthodes, en utilisant les paramètres estimés en entrée.

6.3 Tests et performances

La méthode d'estimation spectrale MDMC a été testée sous différentes conditions dans le cadre de la préparation du traitement des données de la mission Planck.

Nous avons utilisé pour l'essentiel deux jeux de simulations de cartes d'observation différents. La première série de cartes simulées est relativement simplifiée. Il s'agit d'un mélange linéaire bruité de trois composantes aux fréquences d'observation de l'instrument Planck HFI sur des petites cartes carrées. La seconde est plus réaliste. Les cartes d'observation simulées reproduisent l'émission bruitée de la totalité du ciel observé à toutes les fréquences des instruments Planck LFI et HFI, en incluant l'effet de résolution finie des détecteurs. Nous présentons les résultats obtenus dans les deux cas.

6.3.1 Application sur des petites cartes carrées simulées

Les simulations

Les observations d'une petite région du ciel de taille $12.5^\circ \times 12.5^\circ$ située à proximité de l'équateur écliptique et à haute latitude galactique $\simeq 70^\circ$ ont été simulées. Le nombre de pixels des cartes est de 300×300 . Une carte pour chaque fréquence de Planck HFI (100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz) est simulée, chacune contient un mélange de trois composantes ainsi que du bruit. Le mélange suit parfaitement le modèle simple décrit par la relation 3.25. Nous négligeons pour cette application le lobe des détecteurs. Les simulations sont une version simplifiée de celles décrites dans la partie 5.2, car nous supposons qu'il n'y a pas de composantes systématiques. Les lois d'émission des composantes utilisées pour les simulation sont indiquées dans la figure 6.2. Les composantes et le bruit sont obtenus de la façon suivante :

- **Les anisotropies du CMB** sont simulées par la technique que nous avons décrite dans la partie 5.2.1. Nous prenons comme précédemment des paramètres cosmologiques standard.
- **L'émission de la poussière galactique** est elle aussi décrite dans la partie 5.2.1 (nous utilisons ici la même région du ciel).
- **L'effet Sunyaev Zel'dovich thermique** est simulé suivant une méthode décrite dans (Delabrouille et al., 2002b). La distribution en masse et en redshift des amas de galaxies est donnée par la loi de probabilité de Press-Schechter. La position des amas est déterminée aléatoirement en respectant des corrélations angulaires données par les structures à grandes échelles.
- **Le bruit** simulé est décorrélié d'une carte d'observation à une autre et pixel-pixel (bruit blanc). Le niveau de bruit choisi est celui attendu pour chaque bande de fréquence de Planck HFI.

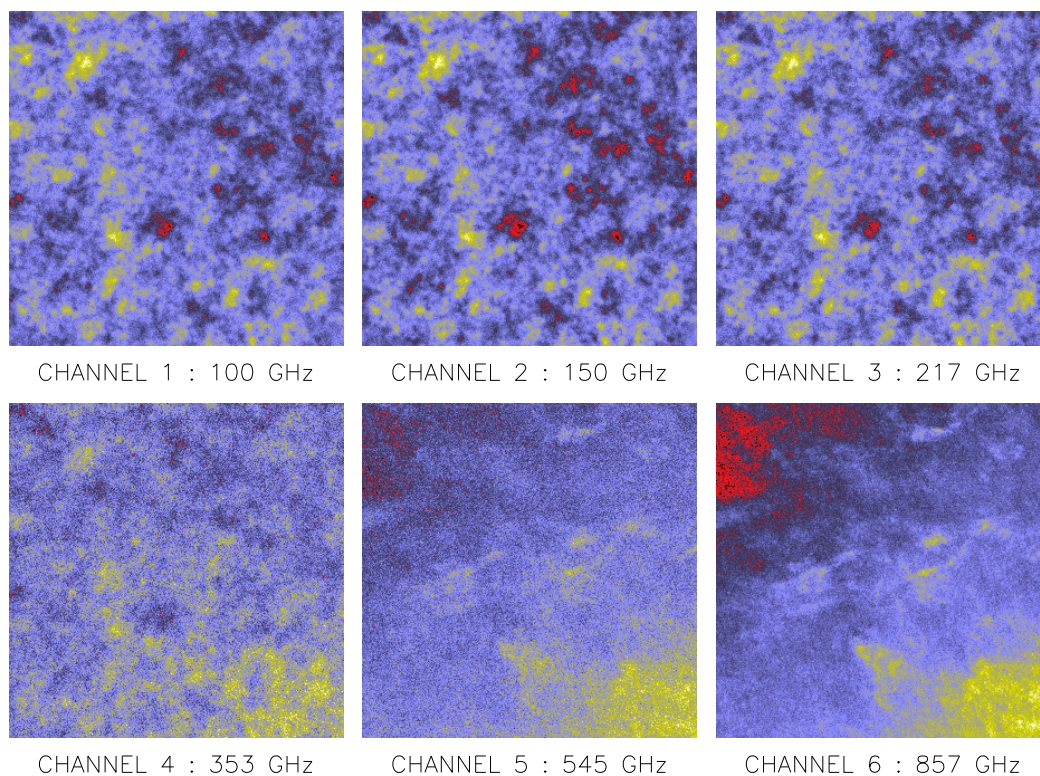


Fig. 6.1: Observations simulées aux six bandes de fréquence de Planck HFI.

Les cartes de composantes apparaissent dans la première colonne de la figure 6.9. Les cartes d'observations sont montrées sur la figure 6.1. Les anisotropies du CMB sont clairement visibles aux trois premières fréquences d'observation. A plus haute fréquence l'émission de la poussière domine. L'effet SZ thermique est toujours sous-dominant.

La table 6.1 donne la puissance relative de chaque composante dans chaque carte simulée (variance par pixel normalisée de telle sorte que la somme de toutes les puissances des composantes et du bruit soit égale à l'unité).

Choix des paramètres d'entrée pour la méthode MDMC

A partir des coefficients de la transformée de Fourier bidimensionnelle des cartes d'observation simulées ci-dessus, nous calculons les matrices de covariance spectrale des observations suivant la relation 6.10. Les domaines spectraux que nous choisissons sont constitués d'anneaux "larges" définis par $\|k_{\min}(q)\| < \|\vec{k}\| < \|k_{\max}(q)\|$ où q est le numéro du domaine spectral (voir le paragraphe "choix des domaines spectraux" dans la partie 6.2.2). 30 anneaux aux plus basses fréquences sont également espacés et couvrent 60% des fréquences spatiales ($\Delta\vec{k}(q) = 0.24 \text{ degré}^{-1}$), 2 anneaux

ν	100	143	217	353	545	857
CMB	0.889	0.926	0.896	0.275	0.0019	1.3×10^{-7}
Poussière	9×10^{-5}	6×10^{-4}	0.0082	0.215	0.687	0.938
SZ	0.0064	0.0032	2×10^{-7}	0.0044	0.00019	5.2×10^{-8}
Bruit	0.102	0.0727	0.108	0.536	0.320	0.0667

Tab. 6.1: Contribution relative de chaque composante à la puissance totale des cartes d'observation

supplémentaires couvrent les 40% restants. Nous choisissons en effet des anneaux plus larges sur un domaine du spectre où le bruit domine sur les composantes.

Nous appliquons la méthode d'estimation spectrale sur les matrices de covariance spectrale empiriques décrites ci-dessus. Dans le cas le plus général, nous estimons l'ensemble des paramètres de notre modèle $\theta = \{A, C_{ii}(q), M_{jj}(q)\}$, en fixant le nombre de composantes que l'on recherche à trois. La matrice de mélange est de taille 6 détecteurs \times 3 composantes ; les spectres de puissance des composantes et du bruit comprennent $(3+6) \times 32$ paramètres. Le nombre total de paramètres est de 303 (on a soustrait un paramètre par composante fixés par la normalisation des observations). Pour comparaison, le nombre total de points de données est $32 \times 6 \times (6+1)/2 = 672$. Nous fixons le nombre d'itérations de l'EM à 200, qui se révèle *a posteriori* un nombre suffisant pour atteindre une région proche du minimum, où le critère a une forme quadratique. Les erreurs d'estimation sont calculées par Monte Carlo sur un millier de réalisations des cartes d'observation. Ceci nous permet par ailleurs de vérifier la présence ou non d'un biais éventuel dans l'estimation des paramètres. Pour chaque réalisation, une carte d'anisotropies du CMB, de l'effet SZ et de bruit sont simulées, en revanche la carte de poussière reste inchangée. Les erreurs sont déterminées indépendamment en calculant la courbure du critère que nous minimisons (voir le paragraphe "prédiction des erreurs d'estimation"), pour ceci nous utilisons une seule réalisation des cartes d'observation.

Résultat 1 : La matrice de mélange

Les résultats de l'estimation des paramètres de la matrice de mélange sont présentés sur la figure 6.2. Les points indiqués au centre de chaque carré sont des moyennes obtenues sur l'ensemble des réalisations des cartes d'observation. Les erreurs sont déterminées en mesurant la dispersion des valeurs des paramètres estimés. La normalisation des spectres d'émission théoriques est fixée en recalant l'ensemble des paramètres relatifs à chaque composante par rapport à un détecteur de référence. On choisit en pratique le détecteur qui possède *a priori* le meilleur rapport signal (de la composante) sur bruit. Il s'agit du détecteur à 100 GHz pour le CMB et l'effet SZ et du détecteur à 857 GHz pour la poussière.

Le résultat important est que les paramètres de mélange sont retrouvés sans biais

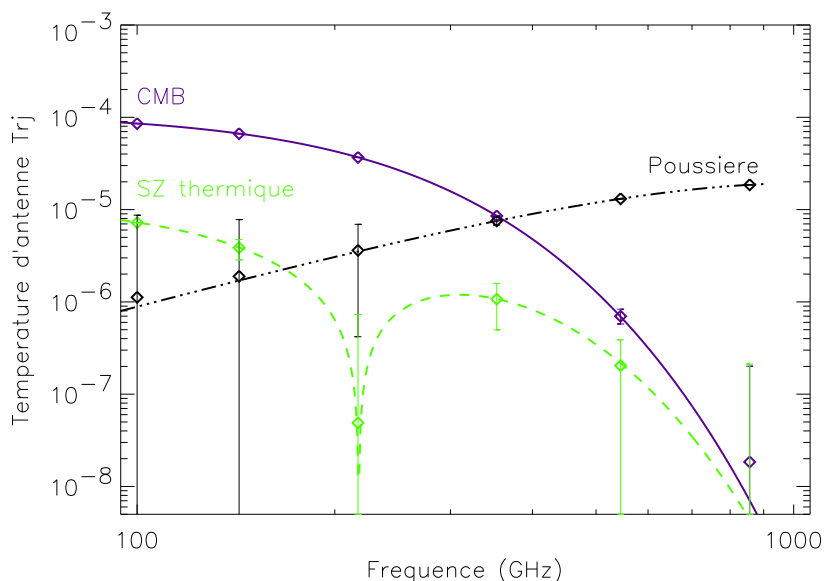


Fig. 6.2: Contraintes apportées sur les lois d'émission des composantes. Les losanges indiquent la valeur moyenne des estimées des paramètres sur 800 réalisations. Les barres d'erreur sont obtenues en mesurant la dispersion des valeurs. Les lignes indiquent les lois d'émission utilisées pour les simulations.

significatif. La loi d'émission des anisotropies du CMB est estimée avec une très bonne précision, excepté à 857 GHz où elles ne sont pas détectées. La loi d'émission de la poussière est bien contrainte aux plus hautes fréquences (entre 217 et 857 GHz). Aux plus basses fréquences (100 et 143 GHz) la valeur nulle n'est pas exclue. La région du ciel choisie pour les simulations est particulièrement défavorable pour la mesure de l'émission de la poussière. Une mesure plus précise de sa loi d'émission pourrait être réalisée à plus basse latitude galactique. La loi d'émission de l'effet SZ, qui est toujours sous dominant, est retrouvée avec une précision moyenne aux fréquences de 100, 143, et 353 GHz. L'effet SZ n'est pas détecté à 217, 545 et 857 GHz. Ces résultats sont illustrés à l'aide des figures 6.3, 6.4 et 6.5 montrant les distributions des estimées de l'ensemble des paramètres de mélange. Sur ces figures sont reportées les erreurs données à la fois par l'écart type et par le calcul analytique (relation 6.49). Les valeurs des paramètres estimés pour la réalisation utilisée pour la prédiction des erreurs sont aussi indiqués. Les barres d'erreur de l'estimation des paramètres de mélange du CMB prédites par le calcul analytique sont très voisines de celles obtenues par Monte Carlo (bien que légèrement sous-estimées). En revanche, concernant les paramètres de la poussière, une différence notable est observée. Les barres d'erreur sont sous-estimées d'un facteur de l'ordre de 4 aux plus basses fréquences et de l'ordre de 2 à la fréquence de 545 GHz. Ce désaccord pourrait être dû à la non-stationnarité de la

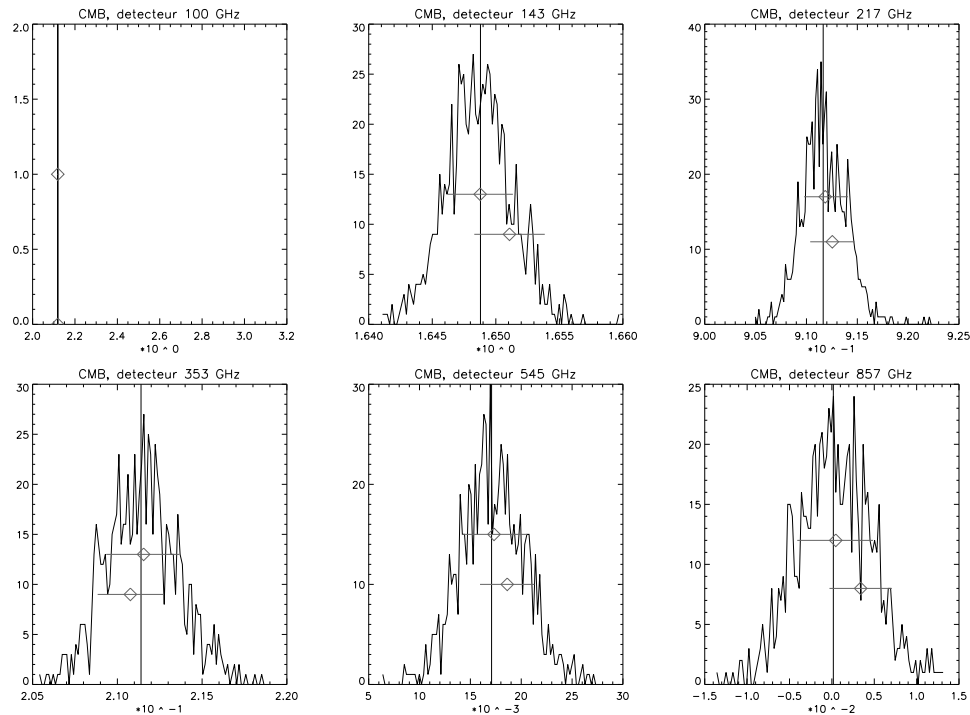


Fig. 6.3: Distribution des valeurs estimées des paramètres de mélange relatif au CMB. En abscisse sont données les valeurs des paramètres et en ordonnées leur fréquence d'estimation. La barre d'erreur qui figure au niveau du premier tiers de chaque carré (en partant du bas) résulte du calcul analytique pour une réalisation quelconque, le losange au centre indique la valeur estimée pour cette réalisation.

poussière (les composantes étant modélisées par des fluctuations gaussiennes stationnaires). Les barres d'erreur sur les paramètres relatifs à l'effet SZ sont sous-estimées d'un facteur proche de 2 pour toutes les fréquences.

Résultat 2 : Les spectres de puissance des composantes

La figure 6.6 montre les résultats d'estimation des spectres de puissance des composantes moyennés sur les domaines spectraux. Comme précédemment, les points indiqués sont les moyennes des spectres estimés sur 800 réalisations et les barres d'erreur sont données par la dispersion des paramètres. La figure met en évidence la bonne précision et l'absence de biais d'estimation des spectres de puissance. Concernant le CMB, les erreurs sont dominées par la variance "cosmique", due à la taille limitée des cartes simulées, sur une très grande gamme d'échelles angulaires. Les barres d'erreur sur le spectre de puissance de la poussière ne comprennent pas la variance d'échantillonnage car nous n'utilisons qu'une seule carte pour les Monte Carlo. Le spectre de puissance de l'effet SZ a été moyenné sur des bandes spectrales plus

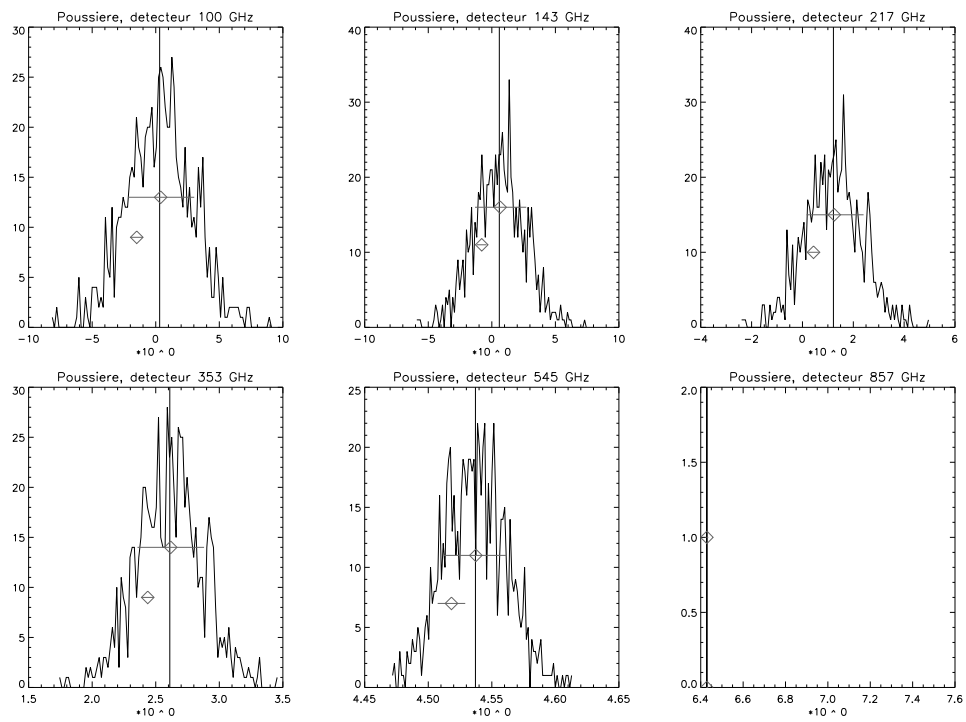


Fig. 6.4: Distribution des paramètres de mélange relatifs à la poussière.

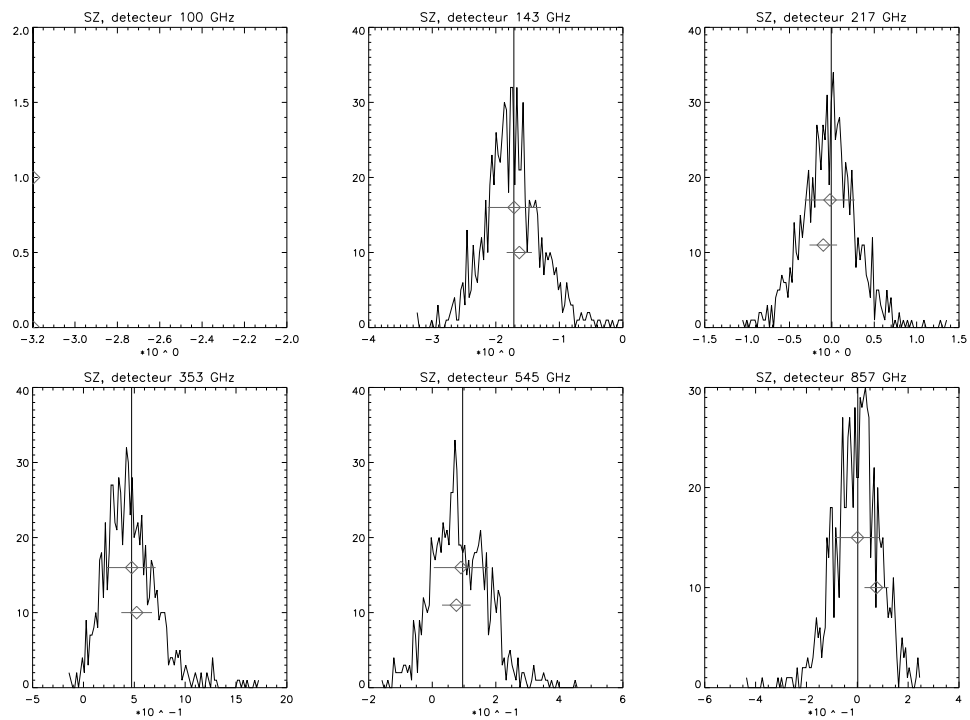


Fig. 6.5: Distribution des paramètres de mélange relatifs à l'effet SZ.

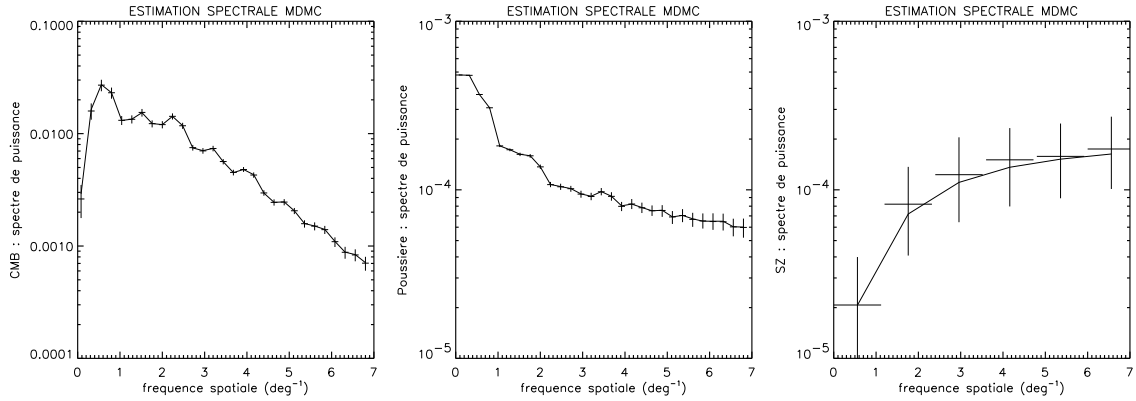


Fig. 6.6: Spectres de puissance angulaire $k^2C(k)$ des composantes estimés par la méthode MDMC en aveugle. Les barres d'erreur sont déterminées par Monte Carlo. Les lignes continues relient les valeurs vraies des paramètres. La figure de gauche correspond au CMB, celle du milieu à la poussière et celle de droite à l'effet SZ.

larges pour la lisibilité. La précision de son estimation est limitée à toutes les échelles angulaires par la variance du bruit.

La figure 6.7 montre le rapport entre les erreurs d'estimation des spectres de puissance mesurées à l'aide du hessien et la dispersion des valeurs mesurées par Monte Carlo. Concernant le spectre de puissance du CMB, la prédiction des erreurs est relativement bonne sur l'ensemble des échelles angulaires. Notons qu'elles sont systématiquement sous estimées au niveau de 10 %. Comme les erreurs prédites incluent la variance d'échantillonnage, on observe naturellement un excès important du rapport des erreurs du spectre de puissance de la poussière aux faibles fréquences (on rappelle qu'une seule carte de poussière est utilisée dans les Monte Carlo). Aux grandes fréquences le rapport semble tendre vers 1. La prédiction des erreurs du spectre de puissance de l'effet SZ est moins précise et semble biaisée (un facteur 2 apparaît pour la plupart des échelles).

Résultat 3 : La covariance du bruit

Les erreurs d'estimation du spectre de puissance du bruit pour chaque détecteur, ainsi que les valeurs moyennes, déterminées par Monte Carlo sont présentées dans la figure 6.8. Comme pour les autres paramètres aucun biais n'est mis en évidence. Bien que la variance d'estimation soit importante à petite fréquence, cela n'affecte pas la reconstruction des spectres de puissance des composantes, puisque dans cette zone, l'erreur est dominée par la variance cosmique.

La méthode a été appliquée en supposant un spectre de puissance blanc du bruit. Les paramètres estimés sont dans ce cas $\theta = \{A, C_{ii}(q), \sigma_j^2\}$ où σ_j est la rms du bruit (les équations de l'EM changent légèrement afin de tenir compte de cette contrainte).

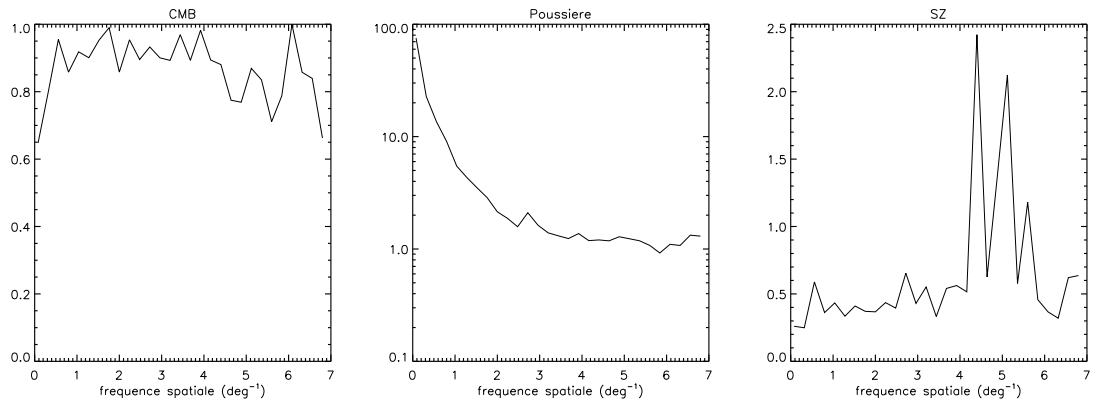


Fig. 6.7: Rapport des erreurs estimées par le calcul analytique et par Monte Carlo sur l'estimation des spectre de puissance du CMB (à gauche), de la poussière (au centre) et de l'effet SZ (à droite).

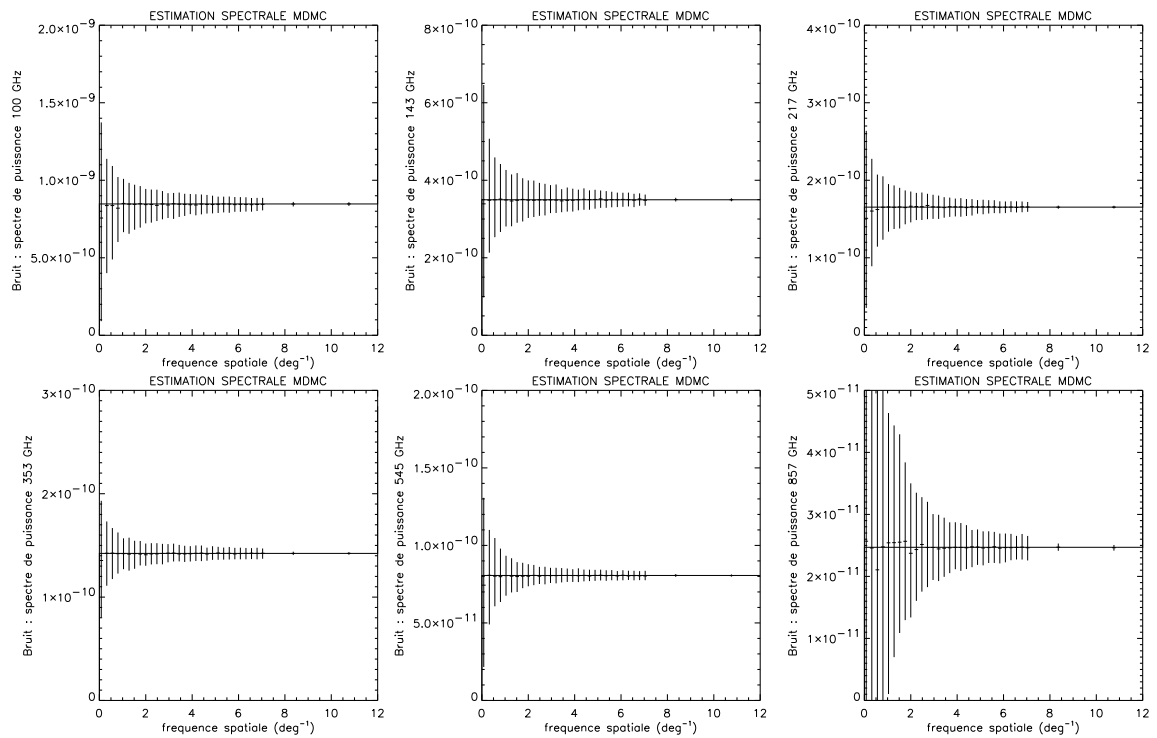


Fig. 6.8: Spectres de puissance angulaires du bruit estimés pour chaque carte d'observation. Les traits indiquent les niveaux des spectres utilisés pour les simulations.

Les contraintes apportées sur la matrice de mélange et les spectres de puissance des composantes sont tout à fait comparables.

Rem : Nous avons testé la méthode sur des cartes d'observation simulées pour chaque fréquence afin de réduire le temps de calcul. Il serait préférable d'appliquer la méthode sur des cartes observées par détecteur ; cela permettrait d'exploiter au mieux l'information fournie par les spectres de puissance croisés entre les cartes d'observation.

Résultat 4 : La séparation des composantes

Les cartes de composantes sont obtenues par un filtrage de Wiener en utilisant les paramètres estimés. La figure 6.9 permet de comparer les cartes obtenues avec les cartes de composantes initiales utilisées dans les simulations. La figure montre aussi les cartes obtenues par un filtrage de Wiener en utilisant les vrais paramètres des simulations. Que cela soit pour la séparation en aveugle ou en utilisant les vrais paramètres, la reconstruction des anisotropies du CMB et des fluctuations de l'émission de la poussière est satisfaisante. Concernant l'effet SZ, seuls les amas les plus brillants sont visibles dans les deux cas. Notre étude, s'opérant dans l'espace de Fourier, est peu adaptée à la reconstruction de l'effet SZ car il s'agit d'un signal très localisé dans l'espace.

6.3.2 Application sur des simulations d'observation de l'ensemble du ciel par Planck

Nous allons maintenant traiter de l'application de la méthode sur des simulations d'observation de l'ensemble du ciel par le satellite Planck. Nous allons voir en particulier quels sont les *a priori* physiques qui peuvent être mis sur les composantes et quelles sont les contraintes qu'ils apportent sur les paramètres d'intérêt.

Description des simulations

Nous utilisons les simulations d'observation de la mission Planck sur l'ensemble du ciel fournies par la collaboration. Les cartes sont simulées à toutes les fréquences des instruments de Planck (30, 44, 70, 100 GHz pour l'instrument basse fréquence et 100, 143, 217, 353, 545, 857 GHz pour l'instrument haute fréquence). Cinq composantes, ainsi que du bruit blanc aux niveaux nominaux des instruments de Planck ont été mélangés suivant le modèle simple linéaire donné par l'équation 6.11. La résolution finie des détecteurs a été prise en compte (les largeurs à mi-hauteur sont, par ordre croissant de fréquence : 33, 23, 14, 10, 10.6, 7.4, 4.9, 4.5, 4.5, 4.5 minutes d'arc). Les

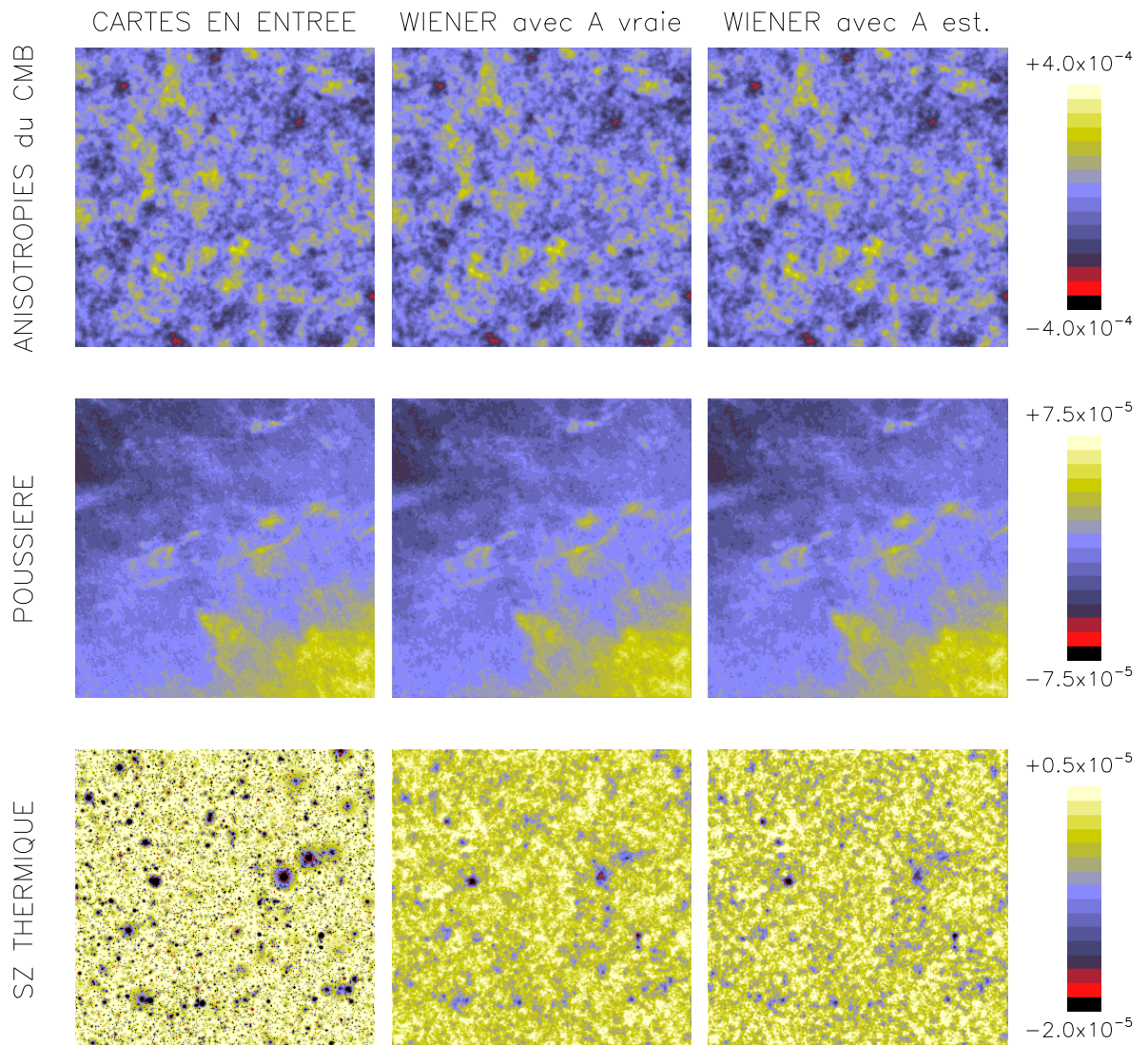


Fig. 6.9: La séparation de Wiener “en aveugle”. Sur la colonne de gauche se trouvent les cartes de composantes utilisées pour les simulations. Sur la deuxième colonne se trouvent les cartes séparées à l’aide d’un filtrage de Wiener en utilisant les valeurs vraies des paramètres. Sur la colonne de droite figurent les cartes séparées à l’aide d’un filtrage de Wiener en utilisant les paramètres estimés par la méthode MDMC.

composantes sont : le CMB, l'émission thermique de la poussière, l'effet synchrotron et les effets SZ thermique et cinétique. Les cartes de composantes sont obtenues de la façon suivante :

Les modes $s(\ell, m)$ du CMB sont tirés au hasard suivant une statistique gaussienne de variances $C(\ell)$, prédites par CMBFast (Seljak et Zaldarriaga, 1996), en utilisant des paramètres cosmologiques standard. Les composantes galactiques ont été obtenues à partir des cartes observées par d'autres expériences. L'émission de la poussière galactique est modélisée en utilisant les cartes à 3000 GHz provenant des données traitées DIRBE-IRAS (Finkbeiner et al., 1999). L'émission synchrotron est simulée à partir de cartes à 408 MHz auxquelles ont été ajoutées des structures aux petite échelles (voir Stolyarov et al. (2002)). Les effets SZ thermique et cinétique ont été entièrement simulés (la technique de simulation est exposée dans Eke et al. (1998)). On rappelle pour la suite que l'effet SZ cinétique (toujours sous-dominant) et le CMB ont des lois d'émission proportionnelles. Les simulations ont été réalisées jusqu'à la résolution de 3.5 minutes d'arc. La figure 6.3.2 montre les cartes d'observation simulées à toutes les fréquences de Planck. La figure 6.11 montre les cartes de composantes utilisées dans les simulations.

On peut remarquer que les composantes galactiques dominant à toutes les fréquences d'observation, au niveau de l'équateur en coordonnées galactiques. L'émission synchrotron est visible aux fréquences entre 30 et 70 GHz environ, tandis que l'émission de la poussière commence à apparaître à 100 GHz et domine à 857 GHz. Les anisotropies du CMB apparaissent nettement à haute latitude galactique entre 30 GHz et 217 GHz. Les effets SZ ne sont pas visibles sur les cartes car ils sont toujours sous-dominants.

L'ajustement spectral quasi-aveugle

Pour l'analyse des cartes d'observation de l'ensemble du ciel, nous choisissons naturellement la base de décomposition en harmoniques sphériques. Les matrices de covariance spectrale empirique sont moyennées sur les indices m (voir 6.2.1) et sur des bandes spectrales de largeur $\Delta\ell = 10$, jusqu'au multipôle $\ell = 3000$.

Nous fixons le nombre de composantes que l'on estime à quatre. En effet, l'effet SZ cinétique, négligeable à toutes les fréquences ne peut pas être séparé des anisotropies du CMB par notre approche puisque les deux composantes ont des lois d'émission proportionnelles. La somme des anisotropies du CMB et de l'effet SZ cinétique peut être vu comme une composante unique. Lorsque nous avons traité de l'application sur les petites cartes carrées, nous avons montré que d'imposer ou non un spectre de puissance plat du bruit ne change pas radicalement la précision de mesure des paramètres relatifs aux composantes. Par conséquent, nous allons ici supposer le bruit blanc pour l'application de la méthode (notons que nous avons introduit du bruit blanc dans les simulations).

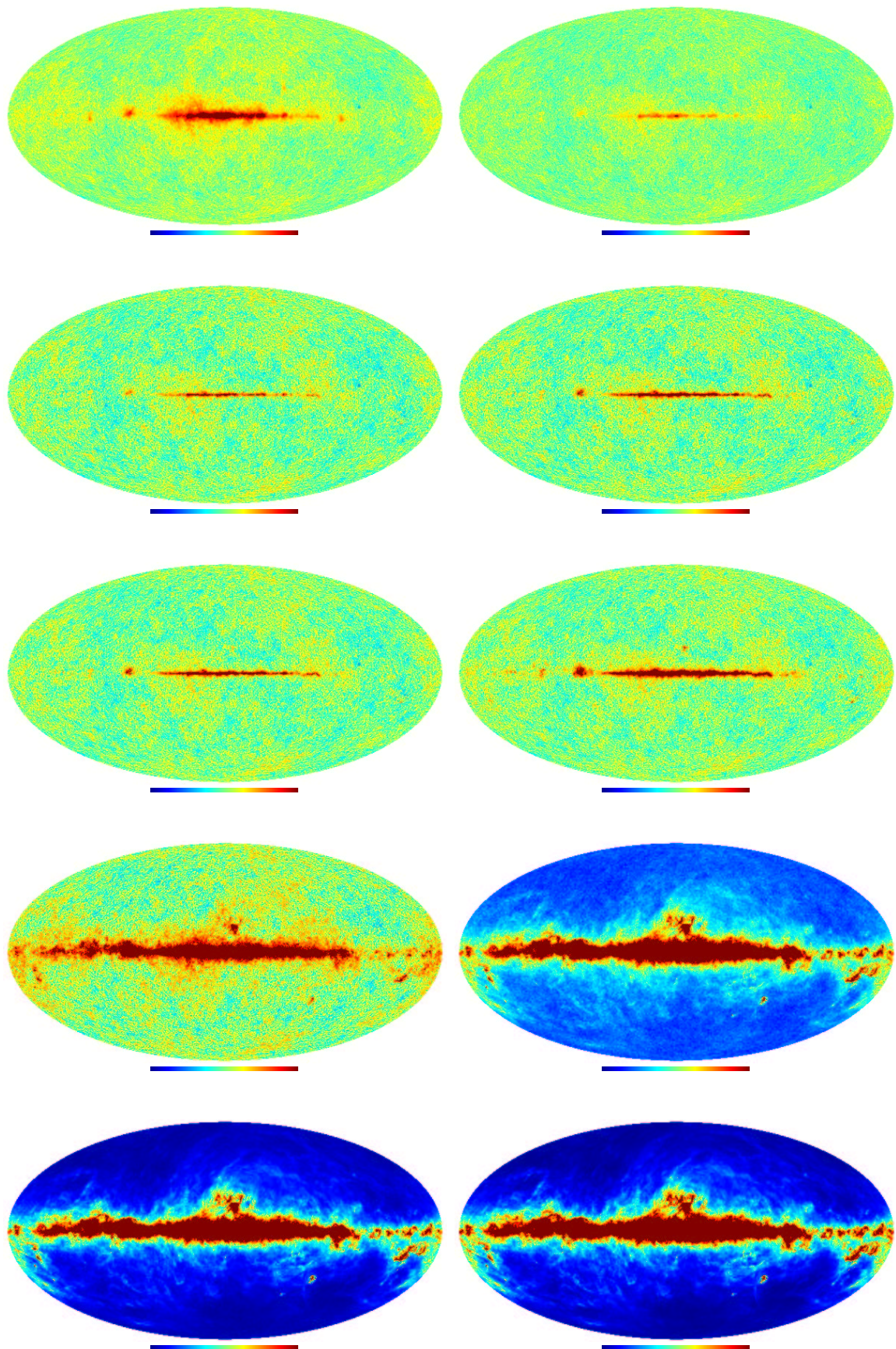


Fig. 6.10: Cartes d'observation simulées du satellite Planck aux 10 fréquences entre 30 et 857 GHz

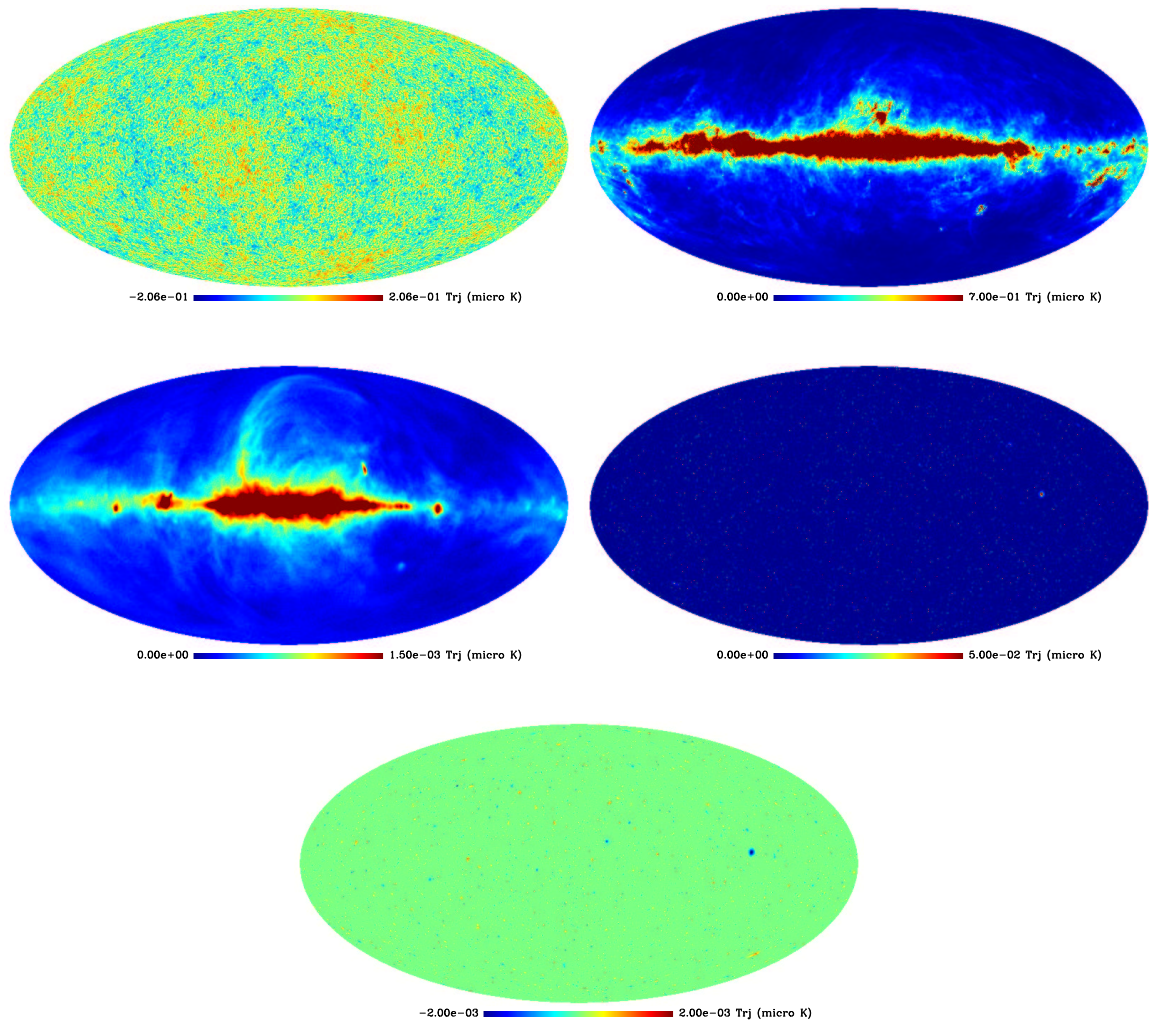


Fig. 6.11: Cartes de composantes astrophysiques utilisées dans les simulations. Dans l'ordre, nous avons : les anisotropies du CMB, l'émission de la poussière, l'émission synchrotron, l'effet SZ thermique, l'effet SZ cinétique.

Fréquence	CMB	Poussière	SZ therm.	Synchrotron
30 GHz	-1.54×10^{-5}	0.114	-4.46×10^{-3}	0
40 GHz	2.19×10^{-4}	2.09×10^{-2}	2.92×10^{-4}	-5.74×10^{-3}
70 GHz	-2.54×10^{-4}	3.82×10^{-3}	-2.56×10^{-4}	-2.73×10^{-2}
100 GHz (LFI)	8.13×10^{-5}	1.08×10^{-3}	-3.34×10^{-3}	-5.69×10^{-2}
100 GHz (HFI)	0	1.06×10^{-3}	0	-5.97×10^{-2}
143 GHz	-6.93×10^{-6}	2.89×10^{-4}	-4.24×10^{-3}	-9.51×10^{-2}
217 GHz	-1.64×10^{-4}	5.23×10^{-5}	17.9	-2.79×10^{-2}
353 GHz	-1.03×10^{-3}	5.81×10^{-6}	6.80×10^{-3}	0.211
545 GHz	-9.85×10^{-3}	-1.20×10^{-6}	-1.41×10^{-2}	3.86×10^{-2}
857 GHz	-1	0	-1	-1

Tab. 6.2: Erreurs relatives sur l'estimation des paramètres de mélange des composantes $(\hat{a} - a_{\text{vrai}})/a_{\text{vrai}}$ obtenus sur les simulations d'observation de l'ensemble du ciel par Planck. Les zéros indiquent les détecteurs qui fixent la normalisation des colonnes de la matrice de mélange. Pour l'observation à 857 GHz, les contributions des composantes autres que la poussière sont fixées à zéro.

Les paramètres que nous estimons sont : les spectres de puissances des composantes, les variances du bruit et tous les éléments de la matrice de mélange exceptés trois. Nous imposons en effet une contrainte sur les lois d'émission des composantes en supposant que seule l'émission de la poussière est présente à 857 GHz. Nous fixons ainsi trois paramètres de la ligne de la matrice de mélange correspondant au détecteur à 857 GHz à zéro. Cette hypothèse, très réaliste, est nécessaire car les composantes galactiques ont des spectres de puissance quasi-proportionnels et sont corrélées pour la raison simple qu'elles sont toutes les deux concentrées au niveau du plan galactique. Sans *a priori*, ces deux composantes sont très mal contraintes par la méthode, mais la procédure simple qui consiste à fixer des paramètres permet de lever la dégénérescence.

Pour cette application, le choix des conditions initiales sur les paramètres se révèle extrêmement critique. Il semblerait en effet qu'il existe des minima secondaires du critère. Nous suivons la procédure décrite dans la partie 6.2.3.

La table 6.2 indique l'erreur relative d'estimation des paramètres de mélange donnée par $(\hat{a} - a_{\text{vrai}})/a_{\text{vrai}}$. L'ensemble des paramètres de la matrice de mélange est estimé avec une très bonne précision. L'erreur relative est de l'ordre de 10^{-4} sur les paramètres relatifs au CMB entre 30 et 217 GHz. Elle croît à plus haute fréquence pour atteindre 1% à 545 GHz. Les éléments de la matrice de mélange relatifs à l'effet SZ thermique sont estimés avec une bonne précision, excepté à 217 GHz (l'effet SZ s'annule à cette fréquence) et 857 GHz (le paramètre a été fixé à zéro). La loi d'émission de

la poussière est extrêmement bien contrainte aux plus hautes fréquences. L'émission semble être détectée à 30 GHz, mais cela pourrait être expliqué par la corrélation de la poussière avec l'émission synchrotron comme on le verra par la suite. La loi d'émission synchrotron est relativement bien contrainte aux basses fréquences.

Intéressons-nous aux spectres de puissance des composantes. La figure 6.12 montre les spectres de puissance estimés comparés aux spectres de puissance “vrais” mesurés sur les cartes de composantes en entrée. Les erreurs relatives définies par $|\tilde{C}(q) - C(q)|/C(q)$ sont indiquées. Dans la relation précédente, $C(q)$ représente le spectre de puissance des cartes de composantes. Ainsi la variance “cosmique” n'apparaît pas dans les erreurs. Tout d'abord, on peut remarquer qu'il n'y a pas de biais significatif d'estimation des spectres de puissance de l'ensemble des composantes. En effet, les paramètres estimés avec une erreur positive sont distribués équitablement comparés aux paramètres dont l'erreur est négative (courbes rouges et noires respectivement sur les graphiques de droite). Aux plus grandes échelles angulaires (pour ℓ inférieur à 200 environ) un léger biais semble apparaître pour les spectres de puissance du CMB et de l'émission synchrotron. Cela peut être expliqué par les corrélations qui existent, du moins au niveau du plan galactique, entre les composantes galactiques. Le spectre de puissance du CMB est estimé précisément jusqu'aux multipôles $\ell \simeq 2000 - 2500$, correspondant approximativement à la position du septième pic acoustique. Aucune contamination par l'effet SZ cinétique n'est visible. A plus petite échelle angulaire, le spectre de puissance du CMB estimé est compatibles avec 0. Le spectre de puissance de l'émission de la poussière est extrêmement bien estimé à toutes les échelles angulaire. L'erreur relative n'excède pas 10^{-4} pour tous les multipôles ℓ supérieurs à 100. En effet, l'émission de la poussière domine aux fréquences d'observation des détecteurs qui possèdent les meilleures résolutions angulaires, de l'ordre de 5 minutes d'arc. De plus, le canal à 857 GHz donne à lui seul une mesure très précise de l'émission de la poussière, car le niveau de bruit y est extrêmement faible. Le spectre de puissance de l'effet SZ thermique est relativement bien contraint entre les multipôles $\ell = 0$ et $\ell = 2000$ environ. Pourtant, des méthodes de séparation qui exploiteraient la structure spatiale particulière de l'effet SZ sembleraient plus adaptées pour son extraction. Enfin, le spectre de puissance de l'émission synchrotron est bien contraint entre les multipôles $\ell = 0$ et $\ell = 400$. A plus petite échelle le spectre estimé est compatible avec 0. En effet aux plus basses fréquences d'observation, la faible résolution angulaire des cartes correspondantes (33 minutes d'arc à 30 GHz) limite la reconstruction du spectre pour les grandes valeurs de ℓ .

La table 6.3 indique les erreurs relatives d'estimation de la variance du bruit dans les différentes cartes d'observation. La précision sur la mesure de ces paramètres est excellente. Le niveau moyen du bruit est essentiellement ajusté aux petites échelles angulaires, où l'effet du lobe des détecteurs est important. Une mesure du spectre de puissance des cartes d'observation autour de $\ell \simeq 3000$ donnerait déjà une bonne estimée des variances du bruit.

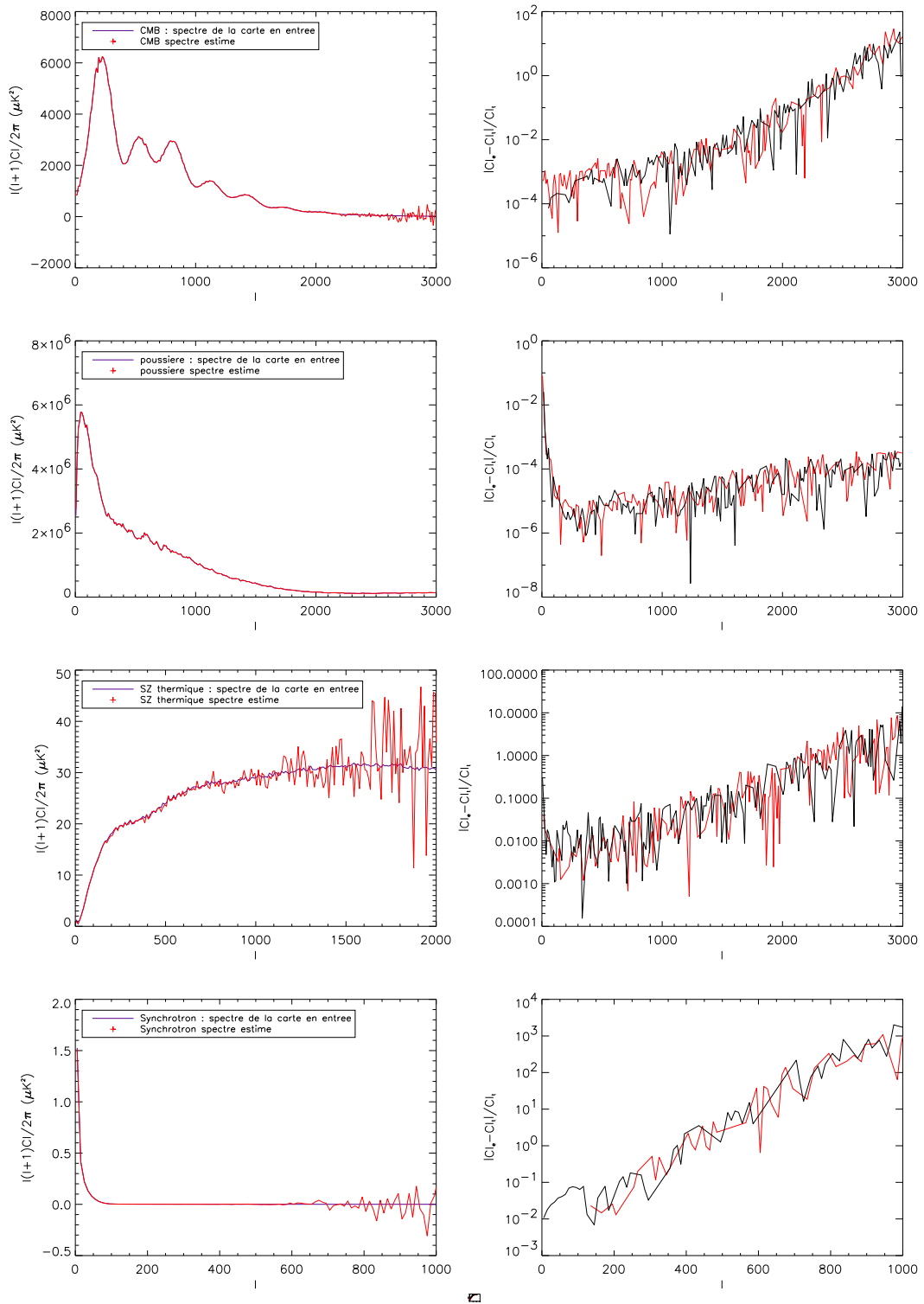


Fig. 6.12: Spectres de puissance des composantes estimés (courbes rouges colonne de gauche) comparés aux spectres de puissance des cartes de composantes en entrée (courbes noires colonne de gauche). Les erreurs relatives sont aussi indiquées (colonne de droite). La courbe noire indique les erreurs de signe positif, la courbe rouge les erreurs de signe négatif

ν en GHz	30	44	70	100 (L)	100 (H)	143	217	353	545	857
$\times 10^{-4}$ en aveugle	-0.26	0.35	0.40	0.61	1.14	-4.10	3.77	-6.27	10.7	-241
$\times 10^{-4}$ A fixé	-0.24	0.40	0.43	0.34	1.74	-6.19	3.29	-2.98	8.40	-194

Tab. 6.3: Erreurs relatives d'estimation de la variance du bruit dans les cartes d'observation par la méthode d'ajustement spectral MDMC. Les valeurs de référence sont déterminées sur les cartes de bruit en entrée. Le premier cas concerne l'ajustement spectral en aveugle, le second cas l'ajustement spectral avec A fixé.

L'approche non aveugle

Nous allons supposer que les lois d'émission des composantes sont parfaitement connues. Ainsi, nous fixons tous les paramètres de la matrice de mélange à leurs valeurs vraies. Les paramètres estimés par l'ajustement spectral MDMC sont $\theta = \{C(q)_{ii}, \sigma_j^2\}$. Les erreurs relatives d'estimation des spectres de puissance des composantes sont montrées dans la figure 6.13. On peut comparer ces résultats à ceux obtenus en aveugle (figure 6.12). Tout d'abord, le point remarquable est que les erreurs relatives d'estimation du spectre de puissance du CMB sont du même ordre dans les deux cas. Il semble donc que les paramètres de mélange des composantes peuvent être estimés en aveugle sans perte de précision dans l'estimation du spectre de puissance du CMB. Dans l'approche semi-aveugle, les spectres de puissance des émissions de la poussière et de l'effet synchrotron sont estimés avec une plus grande précision aux plus grandes échelles angulaires (pour $\ell < 300$). Cela peut être expliqué par les corrélations entre les deux composantes, mais aussi par la forme similaire de leurs spectres de puissance. Les erreurs d'estimation du spectre de puissance de l'effet SZ thermique sont comparables dans les deux approches. Toutefois, une légère différence de précision est constatée aux petites valeurs de ℓ . Les erreurs relatives d'estimation des variances de bruit sont indiquées dans la table 6.3.

La séparation des composantes en aveugle

Nous appliquons la méthode de Wiener pour obtenir des cartes de composantes, en utilisant l'ensemble des paramètres estimés en aveugle. Les cartes reconstruites, recalées par rapport aux détecteurs de référence (voir le paragraphe précédent et en particulier la table 6.2), sont reproduites dans la figure 6.14. On peut les comparer avec les cartes de composantes vraies dans la figure 6.11. Les cartes de la différence sont aussi indiquées dans la figure 6.14. Les différentes composantes sont bien séparées, excepté évidemment l'effet SZ cinétique qui est en théorie contenu dans la carte des anisotropies du CMB, mais négligeable devant le bruit résiduel. Aucune contamina-

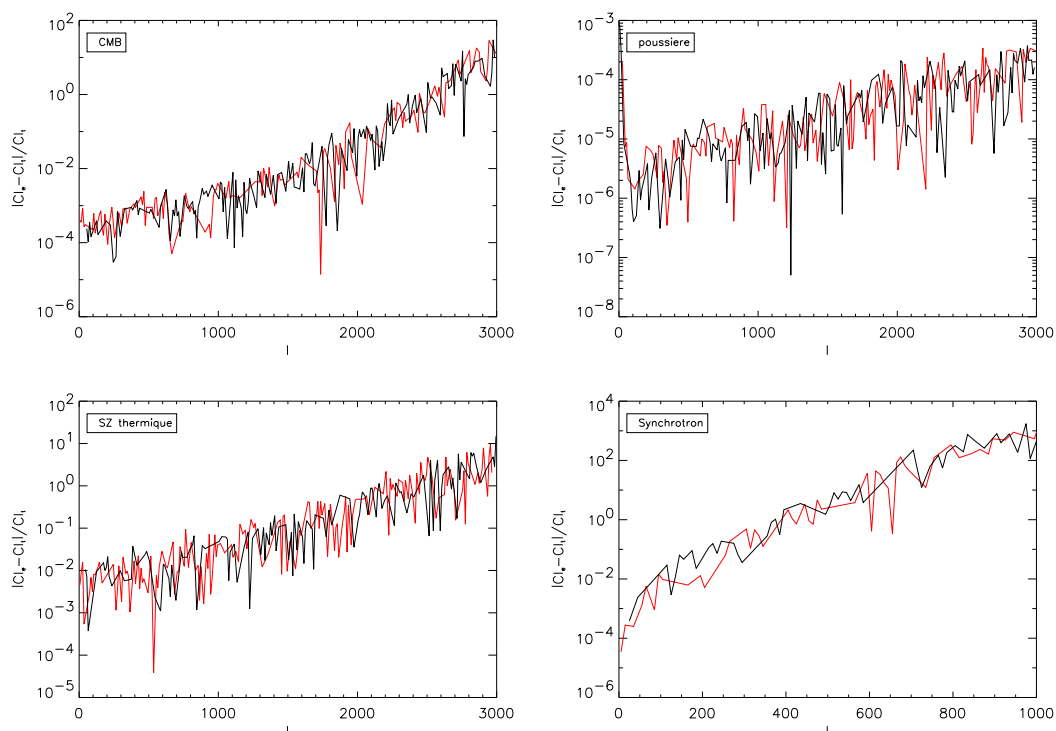


Fig. 6.13: Erreurs relatives d'estimation des spectres de puissance des composantes en supposant connue la matrice de mélange. La courbe noire indique les erreurs de signe positif, la courbe rouge les erreurs de signe négatif.

tion significative par les émissions galactiques n'apparaît sur la carte de résidu des anisotropies du CMB, même au niveau du plan galactique. Ceci montre en particulier la bonne précision dans l'estimation de la matrice de mélange. La carte de résidu de l'émission de la poussière montre une contamination plus importante au niveau du plan galactique, mais qui reste très faible en amplitude relative. La carte d'émission synchrotron possède une contamination importante par du bruit résiduel à des échelles angulaires intermédiaires ($\ell \simeq 400$). Il s'agit d'une partie du bruit qui n'a pas été totalement filtré par la méthode de Wiener. Elle contient aussi une contamination plus importante au niveau du plan Galactique, probablement due à un résidu d'émission de la poussière non soustraite. La carte résiduelle de l'effet SZ thermique montre de nombreux amas de galaxies de petites tailles ainsi qu'une contamination importante par le bruit.

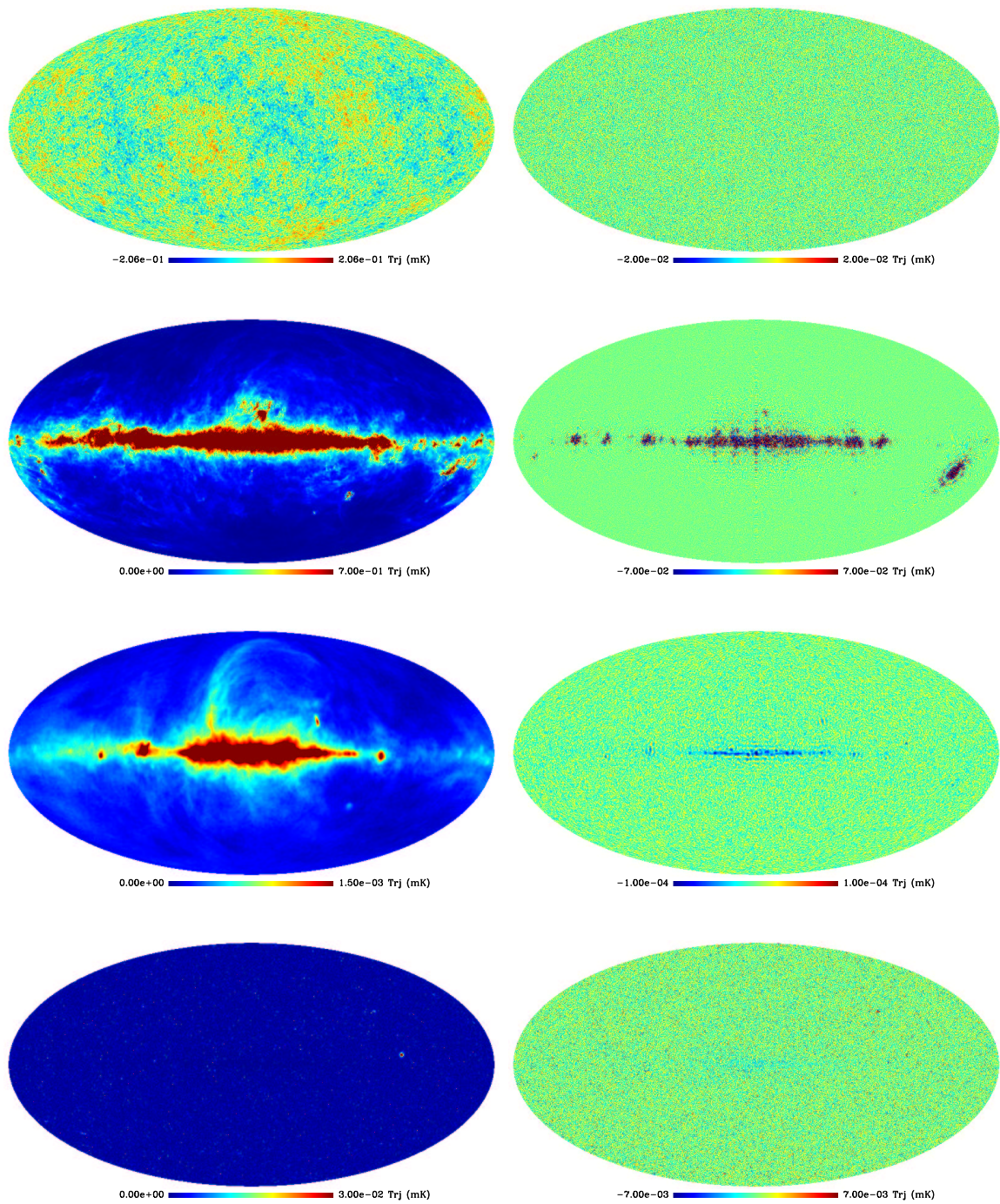


Fig. 6.14: Cartes de composantes astrophysiques reconstruites par la méthode de Wiener en aveugle, en utilisant les paramètres estimés par l'ajustement spectral MDMC. De haut en bas, on a : les anisotropies du CMB, l'émission de la poussière, l'émission synchrotron, l'effet SZ thermique. La première colonne montre les composantes reconstruites, la seconde colonne montre la différence entre les cartes vraies (voir la figure 6.11) et les composantes reconstruites.

7. APPLICATION AUX DONNÉES DE LA MISSION ARCHEOPS



Fig. 7.1: Vue du ballon d'Archeops au moment de son lancement en février 2002.

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la méthode d'ajustement spectral multi-détecteurs multi-composantes en aveugle. Nous avons vu, grâce à son application sur des simulations d'observation de Planck, qu'elle conduit à des estimées non-biaisées des paramètres de mélange et des spectres de puissance des composantes. Dans ce chapitre, nous traitons son application aux données de la mission Archeops.

7.1 Présentation de l'expérience

Archeops est une mission ballon dédiée à la mesure des anisotropies du fond diffus cosmologique. L'objectif principal est la détermination du spectre de puissance aux échelles angulaires intermédiaires ($20 \lesssim \ell \lesssim 400$). Le dernier vol scientifique a eu lieu en février 2002 depuis la base de Kiruna en Suède située au niveau du cercle polaire arctique. Au delà de la mesure précise du premier pic acoustique et de plusieurs paramètres cosmologiques (tel que la densité totale d'énergie dans l'Univers), Archeops a permis de tester la technologie de l'instrument HFI du satellite Planck.

7.1.1 La stratégie d'observation

Dans le but de couvrir une large portion du ciel, Archeops a effectué la totalité de ses vols scientifiques durant la nuit, le soleil étant une source forte de lumière parasite venant perturber les instruments de mesure. La nuit arctique a naturellement été choisie afin d'augmenter le temps de vol. Le ballon Archeops a été lancé avec succès en janvier 2001 puis en février 2002 sous la direction du centre national d'études spatiales (CNES) depuis la base de Kiruna. Le ballon est porté à l'altitude de 35 km environ et dérive sous la force des vents stratosphériques. Lors du dernier vol, 18 heures de données (dont 12 sont exploitables) ont été recueillies. Le ballon a été récupéré près de Norilsk en Sibérie, après une longue dérive le long du cercle polaire. La stratégie d'observation est la suivante : au cours de l'acquisition des données à la fréquence de 153 échantillons par seconde, la nacelle tourne sur elle-même à la vitesse de 2 tours par minute. Le centre du plan focal pointe vers le ciel avec une élévation de 41° . La direction de pointage décrit ainsi des cercles de grande taille sur le ciel. En raison de la rotation de la terre et de la dérive du ballon, ces cercles se déplacent au cours du temps (on a un mouvement de précession de l'axe de rotation du ballon autour de l'axe de rotation de la terre), et permettent de couvrir un anneau sur le ciel comme le montre la figure 7.2. Le centre de l'anneau couvert est approximativement le pôle nord en coordonnées équatoriales. La fraction du ciel couverte au cours du dernier vol d'Archeops est de 30% environ.

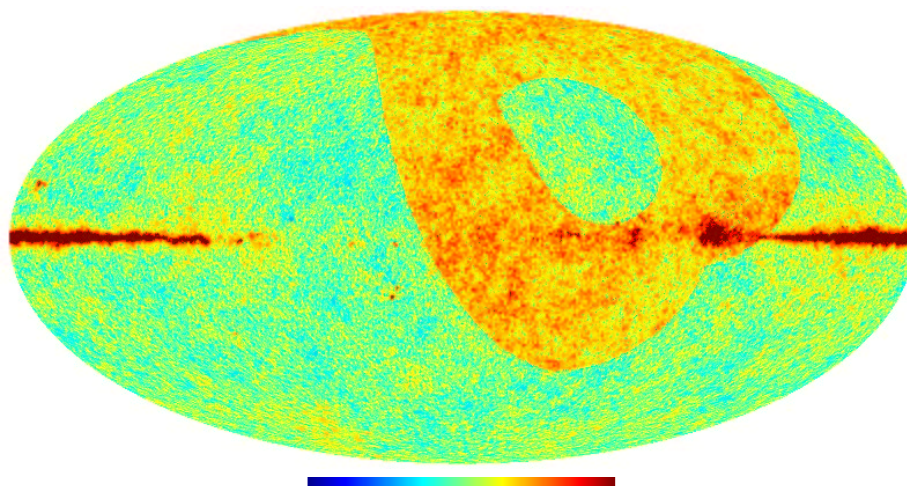


Fig. 7.2: Partie du ciel couverte par Archeops au cours des 12 heures de données exploitables. Dans le fond figure une simulation du ciel autour de 150GHz. L'anticentre galactique est placé au centre de la carte.

7.1.2 L'instrument

L'instrument d'Archeops est composé de différentes parties qui sont le télescope, le plan focal où se trouvent les détecteurs et le système de cryogénie, le système de pointage, le système de mesure de pointage, les systèmes de communication et de stockage (voir l'article technique Benoît et al. (2002) pour plus de détails). Le schéma 7.3 montre la répartition des principaux éléments.

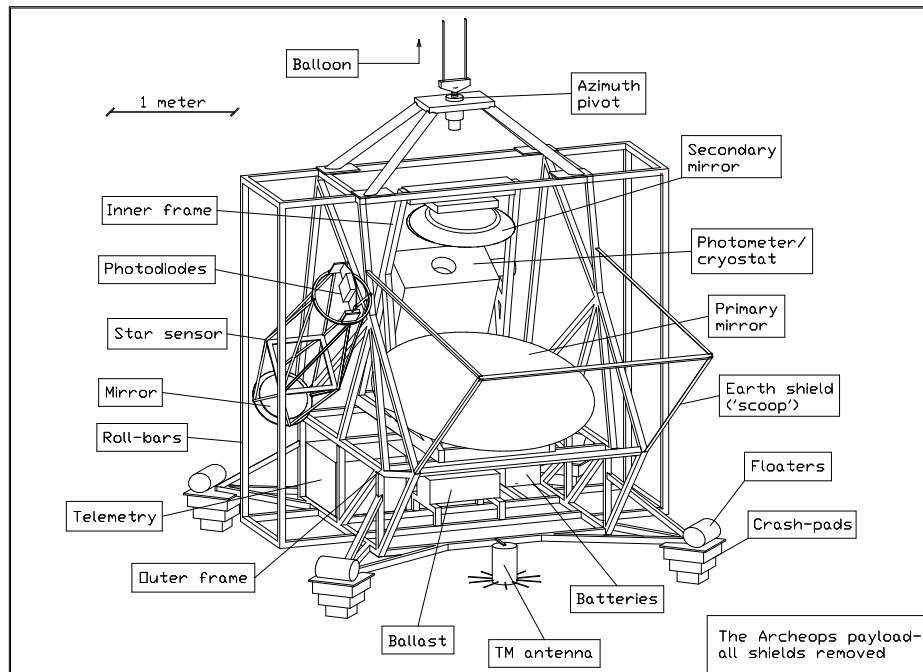


Fig. 7.3: Dessin technique de la nacelle d'Archeops dans sa configuration du vol technique de Trapani en Sicile.

Le télescope

Le télescope d'Archeops est composé de deux miroirs hors axe inclinés de type grégorien. Le miroir primaire, parabolique, possède une taille de 177 cm selon sa plus grande dimension. Le miroir secondaire est elliptique et mesure 84 cm selon sa plus grande dimension. Le diamètre effectif du système optique est de 1.3 mètre qui, en couplage avec des cornet monomodes, permet d'obtenir une résolution angulaire de 10 minutes d'arc environ dans le domaine millimétrique. Le polissage du miroir donne une précision sur la surface de l'ordre de $\lambda/20$.

Le plan focal

Les détecteurs d'Archeops sont des bolomètres développés au laboratoire JPL/-Caltech, optimisés pour une mesure depuis la stratosphère. Les bandes de fréquence sont très voisines de celles de Planck HFI, elles sont centrées autour de 143, 217, 353 et 545 GHz. Les largeurs de bandes sont de 25% environ. Les bolomètres sont de type "toile d'araignée". Leur section efficace d'interaction avec les rayons cosmiques est relativement faible, et ils possèdent une grande sensibilité. Les bolomètres sont refroidis à la température de 100 mK par dilution ^3He - ^4He afin d'augmenter leur sensibilité de telle sorte que leur NEP soit limitée par le bruit de photons du CMB. Une série de trois cornets est placée devant chaque bolomètre comme le montre la figure 7.4. Le rayonnement renvoyée par le télescope est focalisée à l'entrée d'une paire

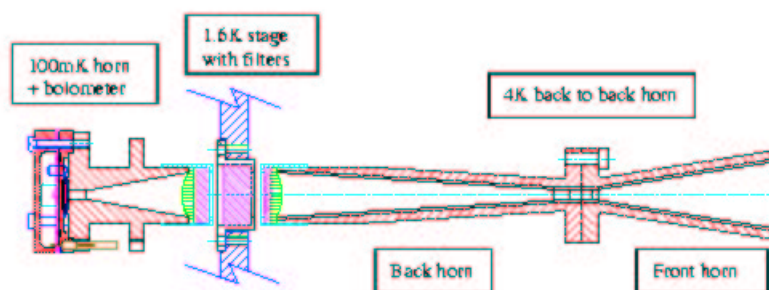


Fig. 7.4: Configuration optique d'un détecteur.

de cornets placés dos à dos, qui sont refroidis à la température de 10 K. Entre ces deux cornets, se trouve un guide d'onde définissant la fréquence de coupure du filtre passe-haut et permettant la sélection des modes qui se propagent entre le télescope et le détecteur. Une série de filtres passe-bas refroidis à la température de 1.6 K est placée à la sortie de la paire de cornets. Une lentille au bout du troisième cornet permet de focaliser le rayonnement vers le bolomètre placé en sortie. Les détecteurs à 353 GHz ont une configuration légèrement différente car ils sont sensibles à la polarisation. La lumière est séparée en deux faisceaux par un polariseur situé après les deux filtres, deux bolomètres recueillent ensuite la lumière.

Au cours de son dernier vol, 23 bolomètres composaient le plan focal d'Archeops. La table 7.1 indique la fréquence d'observation et la sensibilité des différents détecteurs. La figure 7.5 montre la réponse des détecteurs en fonction de la distance angulaire par rapport au centre des lobes. Elle est déterminée à l'aide du passage de Jupiter pouvant être considéré comme une source ponctuelle. La répartition des détecteurs dans le plan focal apparaît sur la figure.

Fréquence	Bolomètre	Sensibilité $\mu K_{\text{CMB}} \times s^{1/2}$
143 GHz	143B03 (voit le 1.6 K)	
	143T01	217
	143K01	188
	143K02 (déconnecté)	
	143K03	93
	143K04	207
	143K05	140
	143K07	194
217 GHz	217T04	320
	217T05 (aveugle)	
	217T06	276
	217K01	364
	217K02	243
	217K03	1559
	217K04	163
	217K05	369
217K06	149	
353 GHz	353K01	1699
	353K02	2016
	353K03	1943
	353K04	2271
	353K05	1853
	353K06	2543
545 GHz	545K01	6384
	545K02 (déconnecté)	

Tab. 7.1: Caractéristiques des détecteurs embarqués lors du dernier vol scientifique.

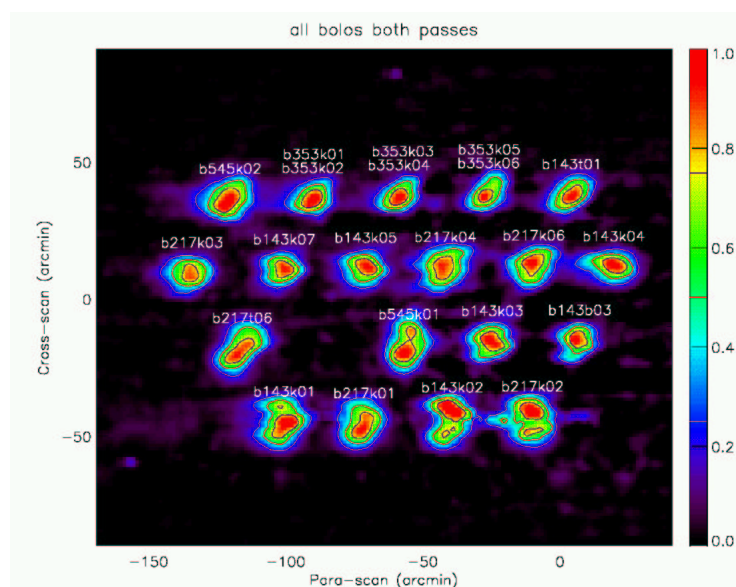


Fig. 7.5: Carte des lobes des détecteurs déterminés à l'aide de Jupiter et répartition des détecteurs dans le plan focal.

7.1.3 Premiers résultats d'Archeops - spectre de puissance

Les premiers résultats d'Archeops ont été publiés en octobre 2002 (Benoît et al., 2003a; Benoît et al., 2003b). Pour la mesure du spectre de puissance du CMB, les données des détecteurs 143K03 et 217K06 seulement ont été utilisées. Compte tenu de la sensibilité des détecteurs (voir la table 7.1), les avant-plans galactiques peuvent être négligés à haute latitude galactique. L'analyse a donc été restreinte à la partie du ciel couverte aux latitudes supérieures à 30° , qui représente 12,6% de la totalité du ciel. Les séries temporelles de mesure traitées ont été coadditionnées après avoir effectué un filtrage des basses fréquences, ces dernières étant très contaminées par le bruit. Les spectres de puissance du bruit sont estimés en s'appuyant sur les redondances des observations sur le ciel. Les deux cartes obtenues sont finalement coadditionnées en pondérant par les niveaux de bruit relatifs. La carte moyennée est représentée sur la figure 7.6. Le spectre de puissance du CMB est obtenu après soustraction du spectre de puissance du bruit résultant, et après correction du filtrage, de l'effet des lobes, de la pixellisation, et de la couverture partielle du ciel. Le formalisme de MASTER (Hivon et al., 2002) a été utilisé. La figure 7.7 montre le spectre de puissance mesuré. Les contraintes apportées sur les paramètres cosmologiques sont présentées dans l'article (Benoît et al., 2003b).

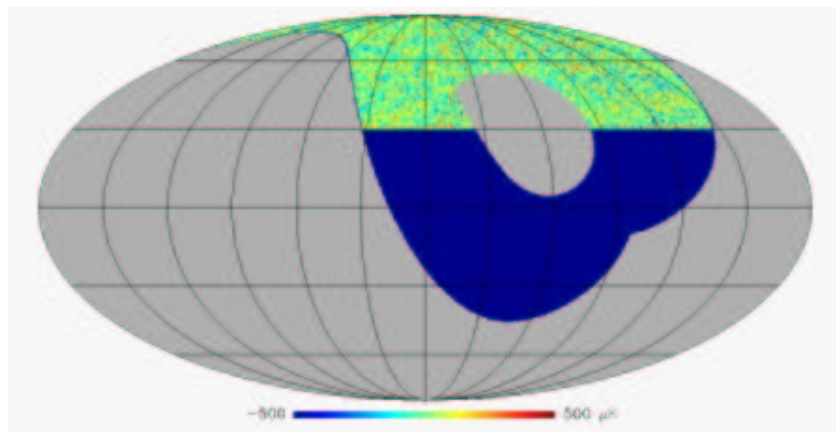


Fig. 7.6: Carte du ciel observé par Archeops. La carte est lissée à la résolution de 15 minutes d'arc. Elle résulte de la coaddition de carte observées par deux détecteurs différents. La région du ciel en noir n'est pas prise en compte dans l'analyse en raison de la contamination par l'émission Galactique.

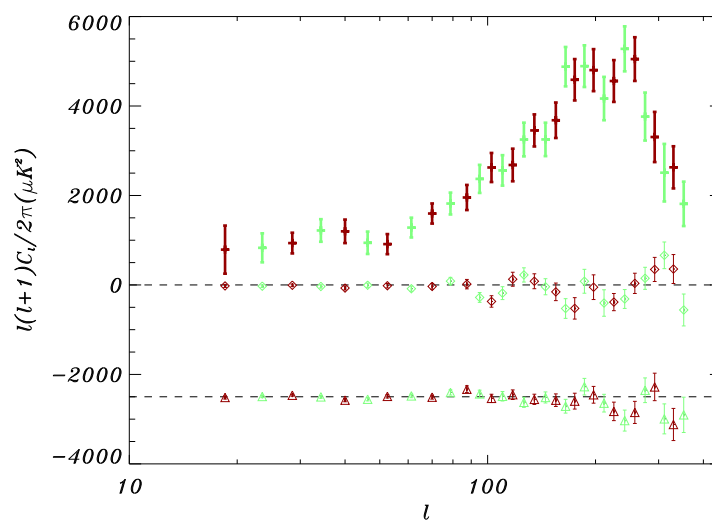


Fig. 7.7: Spectre de puissance du CMB déterminé à partir de la combinaison des deux bolomètres. Les points verts et rouges correspondent à des choix différents de domaines spectraux et ne sont donc pas indépendants. Les diamants blancs montrent le résultat de l'auto-différence de chacun des bolomètres et les triangles correspondent à la différence des deux bolomètres (moins 2500 μK pour la clarté de lecture de la figure).

7.2 *Prétraitement des données et fabrication des cartes pour l'ajustement spectral MDMC*

L'application de la méthode d'estimation spectrale MDMC sur les données de la mission Archeops nécessite un traitement préliminaire important. Avant de décrire les différentes étapes du traitement, nous résumons les principaux signaux parasites qui viennent s'ajouter aux séries temporelles de mesure.

7.2.1 *Les signaux parasites*

Les signaux parasites ont des origines diverses. Une grande partie d'entre eux provient directement de l'instrument, d'autres sont d'origines externes et se distinguent des composantes astrophysiques dans le sens où ils ne sont pas fixes sur le ciel. Les principales sources parasites que l'on retrouve dans les observations de la mission Archeops sont les suivantes :

- **Les fluctuations de l'émission de l'atmosphère.** L'émission de l'atmosphère constitue une grande partie du rayonnement de fond reçu par les détecteurs. Les principaux constituants sont l'ozone, le dioxygène et la vapeur d'eau. Aux fréquences d'observation d'Archeops, l'émission de l'ozone est largement dominante. Les fluctuations du signal atmosphérique dans les observations ont différentes origines : la variation de l'épaisseur optique en raison des variations de l'altitude du ballon, les variations de l'angle azimutal de pointage, la variation de composition et de température des nuages au cours du vol. Les fluctuations de l'ozone sont à relativement basse fréquence dans les séries temporelles. Après reprojexion, l'amplitude des fluctuations sur les cartes d'observation décroît avec le temps d'intégration de l'expérience. La figure 7.8 montre la loi d'émission attendue de l'atmosphère.

Comme l'émission atmosphérique décroît très vite avec l'altitude, seules les très basses couches situées à proximité du plan focal contribuent significativement aux observations. Ainsi, on peut considérer qu'à chaque instant, tous les détecteurs du plan focal, bien qu'à des positions différentes, mesurent les mêmes fluctuations du signal atmosphérique, à un facteur de normalisation près.

- **Les émissions de la Terre et des planètes.** Malgré les protections placées sous la nacelle, des émissions de la Terre peuvent perturber les mesures des détecteurs. La lumière peut en effet subir de nombreuses réflexions par les instruments. Les planètes Jupiter et Saturne ont été observées par Archeops. Leur signal extrêmement fort et quasi-ponctuel permet de mesurer la forme des lobes. Jupiter en particulier, dont l'émission est relativement bien connue, peut être utilisée pour étalonner les détecteurs.

- **Les rayons cosmiques.** Ils apparaissent sous forme de pics extrêmement in-

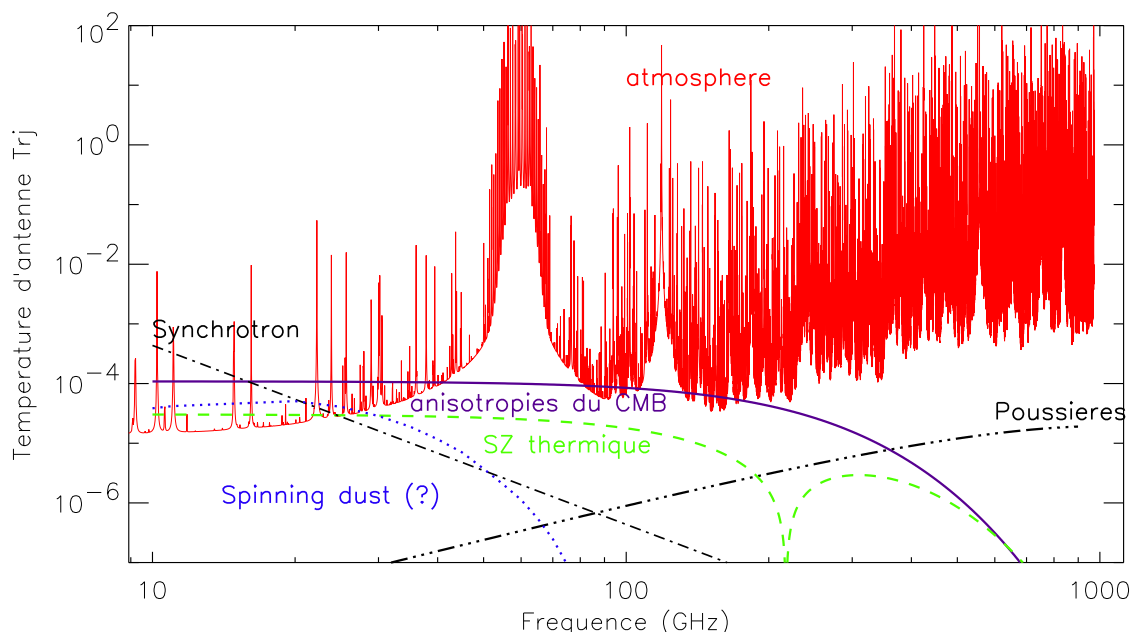


Fig. 7.8: Spectre de l'atmosphère comparé aux spectres de différentes sources astrophysiques à haute latitude galactique (voir thèse de Amblard (2002)).

tenses dans les séries temporelles. Ces pics sont étalés en raison des constantes de temps des détecteurs.

- **L'émission des miroirs, des cornets placés aux températures de 10K et de 1.6K, des cavités des bolomètres à 100mK.** Ces différentes sources d'émission varient essentiellement à très basse fréquence. Elles peuvent affecter l'ensemble des détecteurs du plan focal au même instant.

Les émissions parasites telles que l'atmosphère, dont les fluctuations sont perçues par tous les détecteurs au même instant, constituent des composantes de bruit corrélées. Comme on l'a vu dans le chapitre V, les différents détecteurs pointent vers des directions différentes du ciel au même instant, puisque ils sont placés à des positions différentes dans le plan focal. Comme le montre la figure 7.5, les détecteurs sont espacés de quelques dizaines de minutes d'arc. On a déjà vu que ces composantes systématiques, après reprojexion des séries temporelles, forment des structures spatiales sur les cartes qui dépendent du pointage des détecteurs. Elles ne peuvent donc pas être traitées au même titre que les composantes astrophysiques, en particulier pour l'application de la méthode d'estimation spectrale MDMC. Nous avons décrit dans le chapitre V une méthode de séparation de composantes qui permet de traiter de tels effets systématiques dans le cas particulier où les lignes de balayage sur le ciel

sont parallèles. Pour Archeops, compte tenu de la stratégie de balayage, cette méthode ne pourrait être utilisée que sur des régions du ciel de quelques degrés, trop petites pour permettre une mesure précise du spectre de puissance aux grandes échelles angulaires.

Il est donc crucial de soustraire ces émissions parasites à l'aide de méthodes de décorrélation appliquées sur les données temporelles. Dans la prochaine section, nous présentons dans les grandes lignes, les différents traitements qui ont été appliqués aux données pour permettre l'utilisation de la méthode MDMC.

7.2.2 Le prétraitement des données

Les différentes étapes du traitement sont développées dans Amblard (2002) et Filliatre (2002). Une première étape consiste à filtrer les données brutes afin d'éliminer les très hautes fréquences (la fréquence de coupure est de 60 Hz environ), car les données sont initialement modulées par une porteuse à la fréquence $f_{\text{samp}}/2$. Certaines portions des données sont corrompues. Elles sont signalées et marquées à l'aide de "flag". En fonction de la nature du problème, un traitement adéquat est effectué afin de restaurer les données, quand cela est possible. Les origines des problèmes constatés sont les suivantes : les trous, le trace des rayons cosmiques, les bouffées de bruit, les sauts de niveau, le mauvais pointage.

Dans un deuxième temps, un traitement des données ordonnées en temps est effectué à haute fréquence. Les principaux effets que l'on corrige sont :

- les pics fins situés à des fréquences multiples de $f_{\text{samp}}/72 \simeq 2,12$ Hz, 72 étant le nombre d'échantillons contenus dans chaque bloc transmis à l'enregistreur de bord.
- les fluctuations introduites par des variations de température des étages à 100 mK, 1.6 K et 10 K. Une décorrélation est effectuée à l'aide des mesures des thermomètres. Cette opération est périlleuse car elle peut introduire un biais sur la mesure des anisotropies du CMB.
- Les constantes de temps des bolomètres. Elles sont déterminées en analysant la forme du signal produit par les rayons cosmiques. Les constantes de temps ont pour effet de lisser le signal provenant du ciel dans la direction de balayage du ciel. Les séries temporelles sont déconvoluées afin de corriger ce biais. Cette opération induit une remontée du spectre du bruit vers les hautes fréquences.

Une série de traitements sur les séries temporelles de mesure est réalisée aux fréquences inférieures à 1 Hz environ (compte tenu de la stratégie de balayage, la fréquence de 1 Hz dans les séries temporelles équivaut à 9 degrés sur le ciel). Les principaux effets

que l'on corrige aux basses fréquences sont :

- Les variations de température des différents étages du système de refroidissement. Comme concernant les plus hautes fréquences, les mesures par les thermomètres placés dans les étages à 100 mK, 1.6 K et 10 K sont utilisées pour décorrélérer le signal des bolomètres.
- Le dipôle (voir la partie 1.4.1). Il a une amplitude importante dans les observations aux fréquences de 143 et 217 GHz et devient difficile à mesurer à 353 et 545 GHz. Il a une contribution dans le spectre des données essentiellement à la fréquence de rotation du ballon. Il vient naturellement s'ajouter à d'autres effets synchrones à la fréquence de rotation comme, par exemple, les variations de la masse d'air. Le dipôle est extrêmement utile car il permet l'étalonnage des bolomètres, sa position et son amplitude ayant été mesurées par le satellite COBE. En pratique, une série temporelle contenant uniquement un signal simulé du dipôle est construite. L'amplitude des mesures des bolomètres est ensuite ajustée. Le signal ajusté est finalement soustrait.
- Les variations de la masse d'air. Les mesures de l'altitude du ballon et de l'élévation de la direction de pointage permettent de prédire approximativement l'intensité de l'émission de l'atmosphère au cours du vol. Un modèle de gaz parfait variant avec l'altitude selon une exponentielle décroissante est utilisé. Le signal modélisé, variant essentiellement à très basse fréquence, est soustrait.
- L'émission atmosphérique. Dans le modèle décrit précédemment, les variations du signal atmosphérique dues aux nuages d'ozone ne sont pas pris en compte. Les bolomètres à 353 GHz et surtout le bolomètre à 545 GHz sont très sensibles à l'émission atmosphérique (voir la figure 7.8). Ils ne présentent pas (ou presque) de fluctuations significatives provenant du CMB et sont très peu sensibles à l'émission galactique à haute latitude galactique ($> 30^\circ$). Ces détecteurs peuvent être utilisés pour décorrélérer le signal atmosphérique des détecteurs à 143 et 217 GHz à haute latitude galactique.

La décorrélation de l'émission atmosphérique dans les détecteurs sensibles au CMB permet d'obtenir des résultats satisfaisants à haute latitude galactique. En revanche, cette opération affecte grandement le signal de la Galaxie, très fort dans les observations à 353 et 545 GHz au niveau du plan galactique, car il contribue à relativement basse fréquence dans les séries temporelles. En effet, tous les demi-tours environ, la direction de pointage des détecteurs croise le plan galactique. Un signal important est donc créé à la fréquence de rotation et à toutes ses harmoniques. Les données décorrélées de l'ozone sont donc inutilisables dans des régions proches du plan galactique (certaines corrections sont effectuées à l'aide des données IRAS mais cela s'avère

insuffisant).

Pour la mesure du spectre de puissance du CMB aux grandes échelles angulaires et l'analyse des différentes composantes par la méthode d'ajustement spectral MDMC nous préférons utiliser les données non décorréliées des variations de l'atmosphère. Par ailleurs, cette décorrélation pourra être appliquée pour la mesure du spectre de puissance du CMB sur des plus petites régions à haute latitude galactique.

7.2.3 La fabrication des cartes

Les méthodes

Après traitement, les séries temporelles des bolomètres doivent être reprojctées pour former des cartes. Une simple coaddition des données nous fournit des cartes très striées car les séries temporelles possèdent un bruit important de type $1/f$. Ces cartes sont inutilisables pour la mesure du spectre de puissance des composantes. Comme le montre la figure 7.9, les stries introduisent de la puissance à toutes les échelles angulaires.

Les méthodes de fabrication de carte optimales (au sens des moindres carrés) sont basées sur le modèle des observations 3.16. Ces méthodes s'appuient sur les redondances des observations sur le ciel, qui permettent de soustraire au mieux les dérives basses fréquences du bruit. La solution, donnée par la relation 3.16, a été implémentée au sein de la communauté, elle est fournie par le logiciel MADCAP (Borrill, 1999). Cette méthode est difficilement utilisable pour le traitement des données d'Archeops pour différentes raisons :

- Les stationnarité et gaussianité du bruit sont supposées, or cette hypothèse est fautive en ce qui concerne les dérives aux plus basses fréquences.
- La mémoire et le temps de calcul requis sont trop importants, même pour les ordinateurs les plus performants actuellement, pour traiter la totalité des données d'Archeops.
- Il existe peu de croisements des observations d'Archeops sur la plupart des régions du ciel couvertes.

Des méthodes de fabrication de cartes itératives ont été développées. Il s'agit des méthodes MIRAGE (Yvon et al., 2003) et MAPCUMBA (Doré et al., 2001). Elles permettent de réduire d'un facteur important la mémoire et le temps de calcul et ne nécessitent pas la connaissance *a priori* du spectre de puissance du bruit dans les observations. Nous restons toutefois confrontés aux problèmes soulevés par la non-stationnarité et la non-gaussianité du bruit, et par le manque de croisements sur

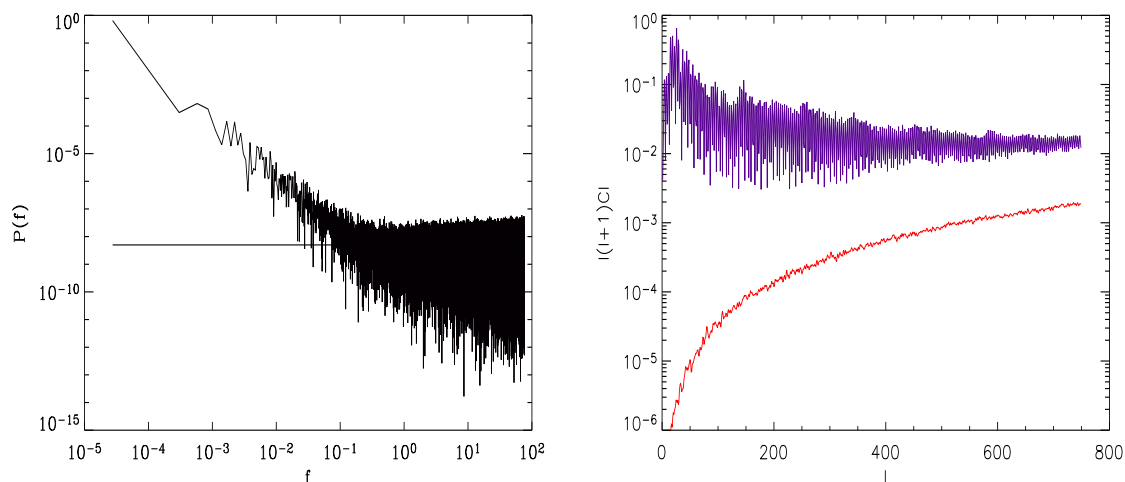


Fig. 7.9: Influence des dérives temporelles basses fréquences sur le spectre de puissance des cartes après une simple reprojexion. La figure de gauche montre le spectre de puissance d'une simulation de bruit caractéristique d'un des bolomètres d'Archeops. Le spectre de puissance choisi en entrée de la simulation est $P(f) \propto [(f_{\text{knee}}/f)^2 + 1]$, la fréquence de transition f_{knee} est de 0.2 Hz (on rappelle que la fréquence d'échantillonnage est de 153 Hz). Le niveau de bruit blanc est indiqué par la ligne continue. Sur la figure de droite la courbe bleue représente le spectre de puissance de la carte construite à partir d'une simple reprojexion de la simulation de bruit. La courbe rouge représente le spectre de puissance d'une carte construite en reprojexionnant une série temporelle contenant du bruit blanc avec la même amplitude que sur la courbe de gauche. Cette comparaison permet de montrer que les dérives basses fréquences du bruit introduisent, après reprojexion sur les cartes et compte tenu de la stratégie de balayage du ciel d'Archeops, de la puissance à toutes les échelles angulaires.

le ciel. Nous optons pour la méthode de fabrication de cartes MIRAGE après avoir effectué un filtrage passe-haut des données en temps.

Le filtrage

Le filtre utilisé est un Butterworth d'ordre 4 (souvent employé en électronique), la fréquence de coupure choisie est de 0.2 Hz ; elle correspond approximativement à la fréquence f_{knee} des bolomètres. Le filtrage permet d'annuler la plus grande partie des dérives du bruit et ainsi de réduire considérablement sa puissance sur les cartes. Par ailleurs, il affecte relativement peu les anisotropies du CMB. La fréquence de 0.2 Hz correspond à des échelles angulaire sur le ciel de l'ordre de 40° . Les structures du CMB dont la taille est supérieure à 40° (du moins dans la direction de balayage) seront pour

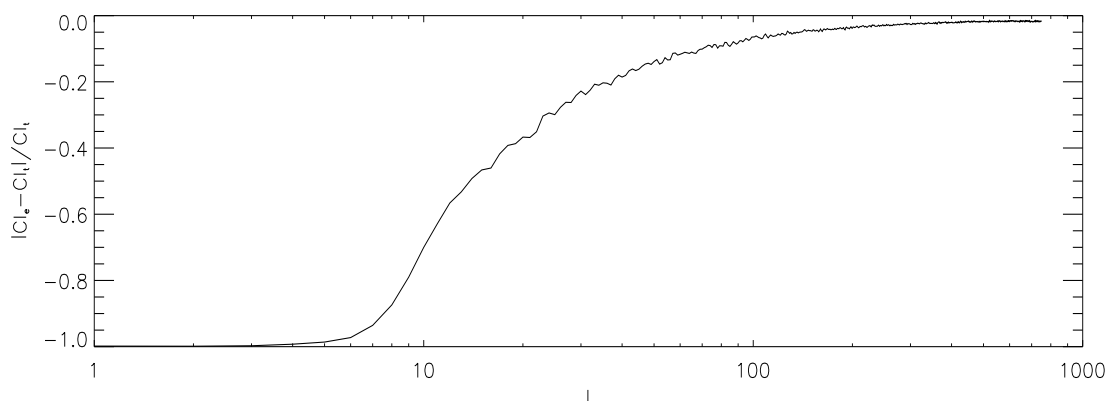


Fig. 7.10: Effet du filtrage sur le spectre de puissance des anisotropies du CMB mesuré par la quantité : $(C_{\ell_f} - C_{\ell})/C_{\ell} \times 100$. C_{ℓ} est le spectre de puissance moyen des anisotropies du CMB sur le domaine du ciel couvert par Archeops. C_{ℓ_f} est le spectre de puissance moyen de cartes d'anisotropies du CMB "réobservées", filtrées à 0.2 Hz et reprojctées en utilisant le pointage d'Archeops.

la plupart soustraites par le filtrage. Ce dernier a un effet anisotrope sur les cartes. Ainsi, certains modes de la décomposition en harmoniques sphériques associés à des multipôles ℓ inférieurs à $\ell_c \simeq 200^\circ/40^\circ \simeq 5$ seront diminués par le filtrage. La figure 7.10 montre le biais introduit par le filtrage, sur la mesure du spectre de puissance des anisotropies du CMB. La quantité $(C_{\ell_f} - C_{\ell})/C_{\ell} \times 100$ est calculée. C_{ℓ} est le spectre de puissance moyen, calculé sur 50 réalisations des anisotropies du CMB sur la partie du ciel couverte par Archeops. C_{ℓ_f} est le spectre de puissance moyen de cartes d'anisotropies du CMB "réobservées", filtrées à 0,2 Hz et reprojctées en utilisant le pointage d'Archeops. L'effet du filtrage est relativement faible à partir de $\ell = 50$ (20% d'erreur) qui correspond au début de la montée du premier pic acoustique. A $\ell = 200$, la perte de puissance n'est plus que de 5% environ.

Amblard (2002) a réalisé une étude sur des simulations de CMB produites à partir de paramètres cosmologiques très différents. Il a montré que l'effet du filtrage sur le spectre de puissance peut être considéré comme indépendant du modèle cosmologique. De ce fait, le spectre de puissance mesuré peut être corrigé en divisant simplement par la fonction de transfert du filtrage.

Le filtrage dans les séries temporelles, qui est par nature anisotrope sur le ciel et dont l'effet sur les fluctuations du CMB (et des autres composantes) dépend du pointage, modifie les structures spatiales sur le ciel d'une façon qui dépend du détecteur. Cela pose un problème puisque l'on suppose, pour l'application de la méthode MDMC, que la forme spatiale des composantes est identique pour tous les détecteurs (seule l'amplitude peut changer). Une fréquence de coupure du filtre de 0.2 Hz semble être un bon compromis.

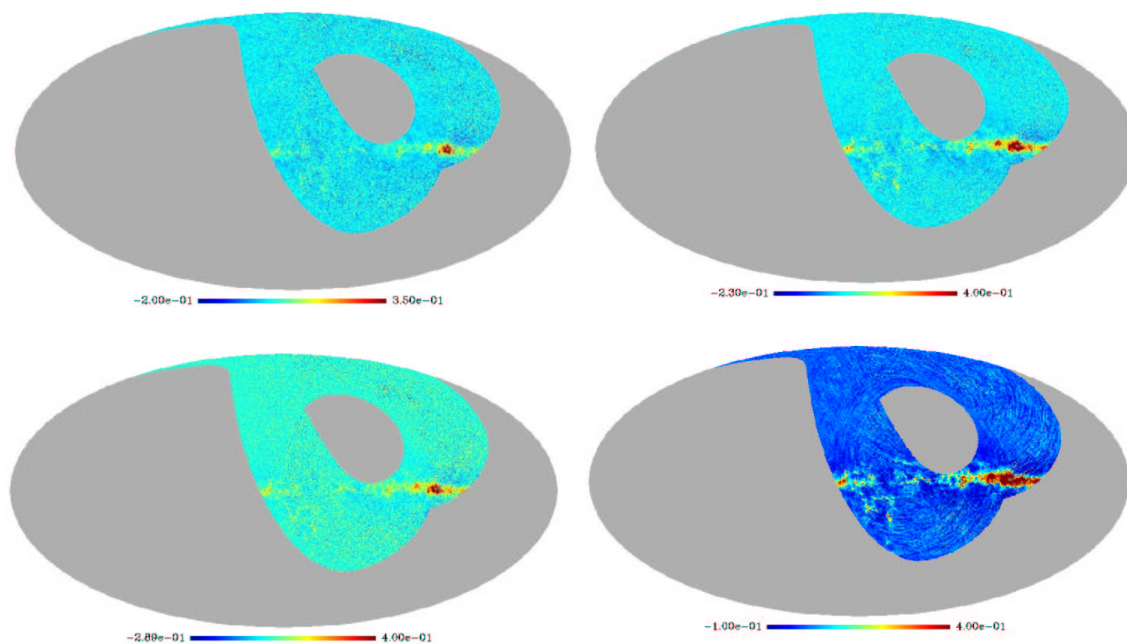


Fig. 7.11: Cartes d'observation par les bolomètres d'Archeops obtenues par la méthode MIRAGE après un filtrage des données. On a dans l'ordre les bolomètres 143k03, 217k06, 353k02 et 545k01. Le centre de chaque carte correspond à L'anticentre galactique.

Un autre effet indésirable du filtrage est la création de rebonds dus à la présence de l'émission de la poussière très concentrée au niveau du plan galactique. Des vagues apparaissent à haute latitude galactique et chaque structure de la galaxie est suivie d'un creux. Cet effet de filtrage n'est pas gênant pour l'application de la méthode d'estimation spectrale pour la mesure des anisotropies du CMB, car il peut être soustrait avec l'émission de la poussière. En revanche, il rend les cartes d'émission de la poussière difficilement exploitables.

Les cartes obtenues

La figure 7.2.3 montre les cartes obtenues pour quatre bolomètres, une par fréquence d'observation d'Archeops. La pixellisation choisie pour les cartes est celle fournie par le logiciel HEALPIX, à la résolutions $n_{side} = 256$. Chaque pixel mesure 13 minutes d'arc de côté.

Tout d'abord, aucune trace de dérives basse fréquences n'apparaît visuellement sur les cartes d'observation à 143, 217 et 353 GHz. Ce n'est pas le cas de la carte à 545 GHz sur laquelle on voit apparaître un signal orienté le long des lignes de balayage. Nous verrons par la suite que ce détecteur est très contaminé par les émissions de

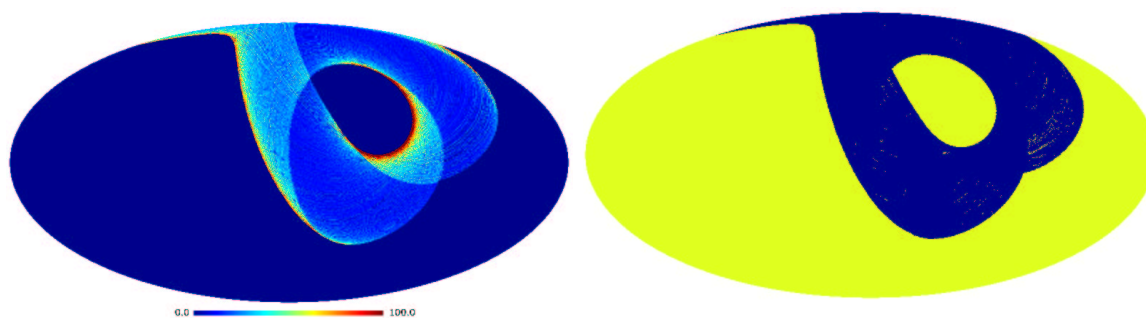


Fig. 7.12: Pixels vus par les 15 meilleurs détecteurs d'Archeops pour une résolution de 13 minutes d'arc (droite) et nombre de mesures par pixel (gauche).

l'atmosphère. La région brillante au niveau du plan galactique, sur le bord droit de la zone couverte, est la région du Cygne. A plus haute latitude galactique, parallèlement à l'équateur, apparaissent des creux induits par le filtrage.

Pour l'analyse jointe des cartes d'observation, il est nécessaire que toutes les cartes couvrent une partie identique du ciel. De fines bandes au bord de la couverture ne sont pas observées par tous les détecteurs. Par exemple, les détecteurs placés sur le bord intérieur du plan focal (par rapport à l'axe de rotation du ballon) auront accès à des latitudes équatoriales moins basses. Par ailleurs, il peut subsister des pixels non couverts ou "trous", après reprojection des données. Cela arrive fréquemment pour des pixels de 13 minutes d'arc. La position des trous de couverture diffère d'une carte observée à une autre. Nous choisissons de prendre pour toutes les cartes d'observation uniquement les pixels vus en commun, les autres pixels sont mis à zéro systématiquement. La figure 7.2.3 montre la position des pixels couverts au final par les 15 meilleurs détecteurs. La carte du nombre de points de mesures par pixel pour le détecteurs 143k03 est aussi représentée. Cette donnée est proportionnelle à la variance du bruit dans chaque pixel (en supposant que le bruit est stationnaire dans les séries temporelles), et permet ainsi de mettre en évidence la non-stationnarité du bruit dans les cartes d'observation.

Après avoir soustrait la valeur moyenne du signal sur les cartes, nous affectons aux pixels non-couverts ou éventuellement masqués, la valeur de zéro.

7.3 La méthode d'ajustement spectral appliquée à Archeops

Les cartes d'observation que nous avons décrites dans la section précédente peuvent être utilisées pour l'application de la méthode d'estimation spectrale MDMC. Nous décrivons tout d'abord les conditions initiales et le choix des paramètres pour le calcul

des matrices de covariance spectrale. Nous présentons ensuite les résultats d'estimation des paramètres du modèle, ainsi que les contraintes apportées. En particulier, la matrice de mélange nous renseigne sur les lois d'émission des composantes, mais aussi sur l'étalonnage relatif des détecteurs. Nous nous focaliserons sur le spectre de puissance du CMB estimé et nous décrirons les corrections qui sont appliquées en raison de la couverture partielle du ciel et du filtrage des données.

7.3.1 La préparation des données pour l'ajustement spectral

Tout d'abord, nous effectuons une sélection des bolomètres en fonction des problèmes constatés à la fois dans les séries temporelles de mesure et dans les cartes reconstruites. Les bolomètres choisis sont les suivants :

- **143 GHz** : 143k03, 143k04, 143k05
- **217 GHz** : 217T06, 217k01, 217k02, 217k03, 217k04, 217k06
- **353 GHz** : 353k02, 353k03, 353k04, 353k05, 353k06
- **545 GHz** : 545k01

On peut noter à l'aide de la table 7.1 que les bolomètres 143k03, 217k04 et 217k06 sont de loin les plus performants, le premier étant nettement supérieur aux deux autres. Par la suite nous présenterons les résultats obtenus à partir de deux jeux de cartes différents :

- Le premier est obtenu après avoir appliqué l'ensemble des traitements sur les données (voir le partie 7.2.2), excepté la décorrélation de l'émission de l'ozone dans les séries temporelles. Tous les bolomètres sélectionnés ci-dessus sont utilisés. La totalité de la couverture du ciel (du moins la partie commune à tous les détecteurs) est prise en compte excepté la région du Cygne. Un masque supplémentaire est appliqué sur les cartes aux latitudes galactiques comprises entre $+10$ et -10° , et aux longitudes comprises entre 0 et 120° . La fraction du ciel couverte est de 26,7%.

- Le second a subi, en plus des autres traitements, la décorrélation de l'émission de l'ozone à l'aide des bolomètres aux fréquences 545 et 353 GHz. Cette opération modifie fortement le signal galactique. Ainsi seuls les bolomètres à 143 et 217 GHz sont utilisés pour notre analyse (excepté le bolomètre 217T06). Nous utilisons les données à haute latitude galactique uniquement, où l'émission de la poussière est négligeable. Un masque est appliqué sur les cartes aux latitudes inférieures à 30° . La fraction du ciel couverte est de 12%.

Fonction de transfert des lobes

Nous supposons que les lobes des détecteurs sont symétriques et gaussiens. Les largeurs à mi-hauteur des gaussiennes sont estimées par un ajustement sur les images obtenues de Jupiter. Compte tenu du niveau de bruit dans les observations, on s'attend à ce que les effets sur le spectre de puissance de la non-gaussianité ou la non-symétrie du lobe soient faibles.

7.3.2 L'application

Les matrices de covariance spectrale et la couverture partielle

Les cartes de la totalité du ciel partiellement observées sont décomposées dans la base des harmoniques sphériques.

En premier lieu, le modèle de mélange linéaire pour les coefficients des cartes d'observation reste valable malgré la couverture partielle du ciel :

$$x_d(\ell, m) = A_{di} \tilde{s}b_{id}(\ell, m) + n_d(\ell, m) \quad (7.1)$$

où $\tilde{s}b_{id}(\ell, m)$ sont les coefficients relatifs à la composante numéro i dégradée à la résolution du détecteur d , A et $n_d(\ell, m)$ sont respectivement la matrice de mélange et les paramètres de bruit. Les coefficients relatifs aux composantes convoluées sont donnés par l'intégrale suivante :

$$\tilde{s}b_{id}(\ell, m) = \int_{4\pi} (B_d * s_i)(\vec{r}) W(\vec{r}) Y_{\ell m}^*(\vec{r}) d\vec{r} \quad (7.2)$$

où $W(\vec{r})$ est une fonction qui prend la valeur 1 pour les pixels couverts et 0 ailleurs. On a un produit de convolution entre la composante $s_i(\vec{r})$ et le lobe $B_d(\vec{r})$ (le lobe est supposé symétrique). La composante convoluée $(B_d * s_i)(\vec{r})$ en tout point \vec{r} s'écrit aussi en fonction des coefficients dans la base des harmoniques sphériques :

$$(B_d * s_i)(\vec{r}) = \sum_{\ell, m} B_d(\ell) s_i(\ell, m) Y_{\ell m}(\vec{r}) \quad (7.3)$$

On obtient après quelques manipulations :

$$\tilde{s}b_{id}(\ell, m) = \sum_{\ell', m'} M_{\ell m \ell' m'} s_i(\ell', m') B_d(\ell') \quad (7.4)$$

avec

$$M_{\ell m \ell' m'} = \int_{4\pi} W(\vec{r}) Y_{\ell', m'}(\vec{r}) Y_{\ell, m}^*(\vec{r}) d\vec{r} \quad (7.5)$$

Comme le montre la relation 7.4, le fait que la couverture du ciel soit partielle induit des corrélations entre les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques mesurés. En effet, ces derniers résultent d'un mélange (non inversible) entre les coefficients réels. La longueur de corrélation des paramètres suivant le multipôle ℓ dépend étroitement de la fraction du ciel couverte et reste relativement faible pour Archeops ($\Delta\ell \lesssim 5$).

Nous supposons que la fonction de transfert du lobe $B_d(\ell)$ varie peu sur l'intervalle de corrélation entre les paramètres en fonction de ℓ , ainsi nous pouvons écrire :

$$\tilde{s}_{id}(\ell, m) \simeq B_d(\ell) \sum_{\ell', m'} M_{\ell m \ell' m'} s_i(\ell', m') \quad (7.6)$$

Ainsi $B_d(\ell)$ se factorise dans la partie “composante” de l'expression 7.1 de telle sorte qu'il peut être, après correction, injecté dans le terme de bruit. On peut alors définir les pseudo-coefficients des observations indépendamment de l'effet du lobe :

$$\tilde{s}_i(\ell, m) = \sum_{\ell', m'} M_{\ell m \ell' m'} s_i(\ell', m') \quad (7.7)$$

Après multiplication par $B(\ell)^{-1}$, le modèle des observations s'écrit :

$$x'(\ell, m) = A \tilde{s}(\ell, m) + B(\ell)^{-1} n(\ell, m) \quad (7.8)$$

On retrouve ainsi la modèle “classique” d'émission déjà explicité.

On rappelle pour la suite que la méthode d'ajustement spectral est basée sur la minimisation de la divergence entre les matrices de covariance spectrale mesurées sur les cartes d'observation $\tilde{R}_{x'}(q)$ et leurs espérances $R_{x'}(q)$. La méthode est équivalente au maximum de vraisemblance uniquement dans le cas où les coefficients de la décomposition des cartes d'observation sont indépendants. Pour notre application, les coefficients sont corrélés en raison de la couverture partielle du ciel. Par conséquent la méthode est sous-optimale, mais garde la propriété d'absence de biais. Nous choisissons des domaines spectraux de largeur $\Delta\ell \geq 15$, qui est supérieure à la longueur de corrélation des coefficients. Cette largeur est choisie de telle sorte que les barres d'erreurs sur la mesure du spectre de puissance du CMB aient des dimensions raisonnables (ou lisibles sur une figure).

Le choix des paramètres à estimer

Les paramètres estimés avec la méthode MDMC en aveugle sont :

- la matrice de mélange A
- les pseudos spectres de puissance des composantes $\tilde{C}(\ell) = \langle \tilde{s}(\ell, m) \tilde{s}(\ell, m)^\dagger \rangle$ (on verra dans la partie 7.3.5 comment on corrige les spectres de puissance estimés afin d'en obtenir une mesure non-biaisée)

- les spectres de puissance du bruit sur les cartes $N(\ell)$

Etant données la sensibilité et les fréquences couvertes par Archeops, nous espérons mesurer deux composantes astrophysiques qui sont le CMB et l'émission de la poussière galactique. Le nombre de composantes présentes dans les cartes d'Archeops est déterminé en appliquant la méthode successivement avec un nombre croissant de composantes à estimer. Nous arrêtons cette procédure lorsque les composantes significatives se stabilisent. Sur le jeu de cartes I, nous fixons le nombre de composantes à 4, sur le jeu de cartes II, ce nombre est de 2.

Résumé des grandes lignes de la méthode

A partir des cartes d'observation nous effectuons les opérations suivantes :

- calcul des matrices de covariance spectrale, correction du lobe, moyenne par bande spectrale
- **ajustement spectral MDMC**, estimation des paramètres sur les données non-étalonnées (en μV)
- étalonnage
- calcul des erreurs par la mesure du hessien
- séparation des composantes par la méthode de **Wiener**
- correction du spectre de puissance du CMB, en raison de la couverture partielle, du filtrage, des effets de la pixellisation.

7.3.3 Les principaux résultats

La table 7.2 présente les résultats obtenus pour la matrice de mélange, en utilisant les cartes construites à partir des données non décorréliées de l'ozone. Chaque paramètre est converti en unités de température "CMB". Les coefficients d'étalonnage sont mesurés à l'aide du dipôle pour les détecteurs à 143 et 217 GHz et à l'aide de Jupiter pour les détecteurs à 353 et 545 GHz. Les erreurs sur les paramètres estimés, calculées à l'aide du hessien, sont multipliées par la racine carrée de la fraction de couverture. Pour chaque composante, les paramètres de mélange sont recalés par rapport à un détecteur de référence. Les détecteurs choisis sont le 143k03 pour les composantes 1 et 2, et le 545k01 pour les composantes 3 et 4.

La figure 7.13 montre les pseudos-spectres de puissance estimés pour les quatre composantes. Les pseudo-spectres sont multipliés par les paramètres de mélange au carré pour quelques détecteurs. Ainsi, la contribution de chaque composante au signal de quelques détecteurs peut être visualisée. Nous avons choisi les détecteurs qui possèdent le meilleur rapport signal sur bruit dans les différentes bandes de fréquence. Les spectres de puissance du bruit estimés sont aussi représentés.

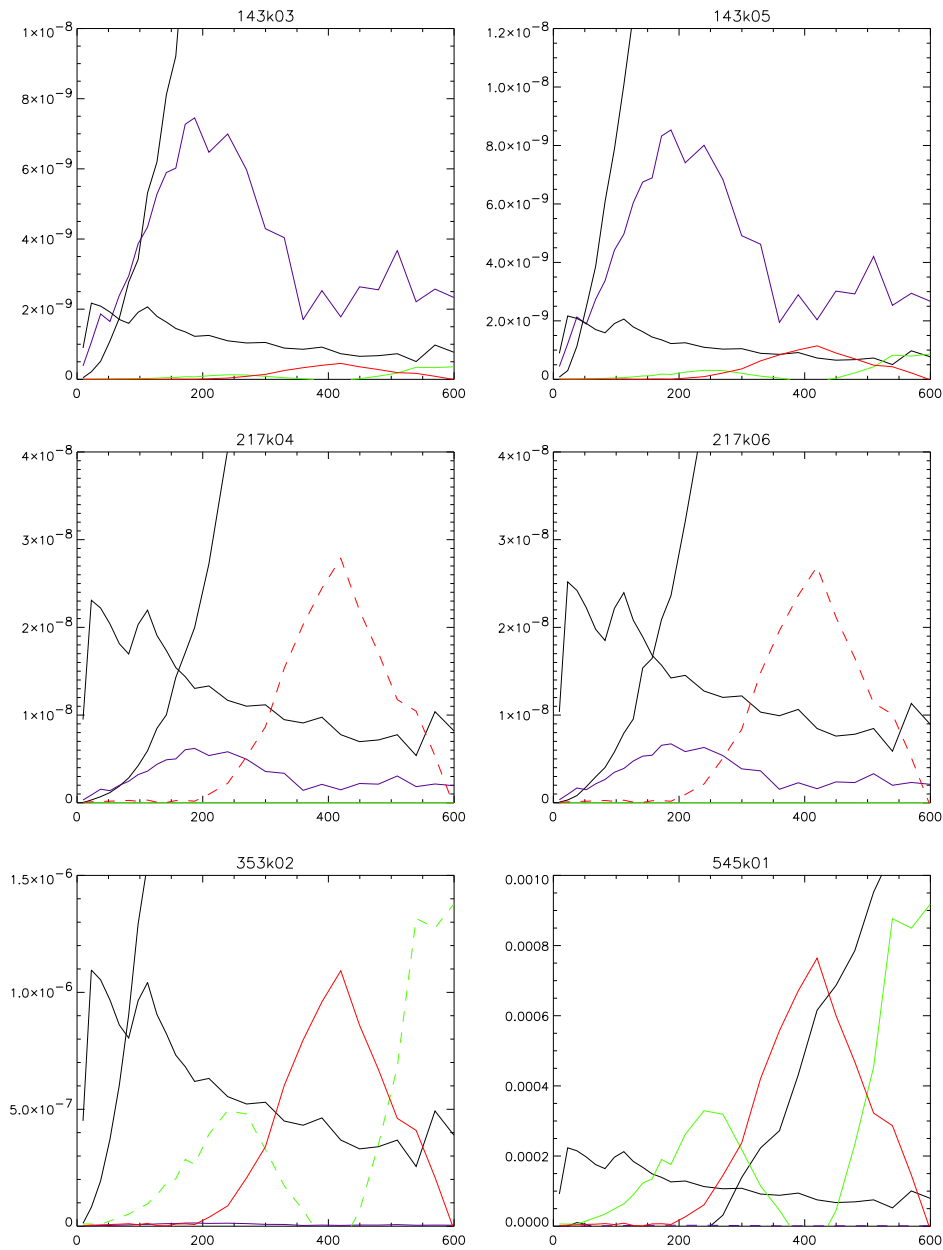


Fig. 7.13: Pseudo-spectres de puissance estimés des composantes et du bruit. Chaque vignette représente les spectres de puissance des composantes “vues” par un des principaux détecteurs : $A_{di} \times \ell(\ell + 1)\tilde{C}_i(\ell)$ en K_{CMB} . Les spectres de puissance estimés sont multipliés par les éléments de la matrice de mélange au carré pour les détecteurs considérés. La couleur bleue désigne le CMB, noire l’émission de la poussière, rouge et verte les composantes atmosphériques. Le spectre de puissance estimé du bruit figure en noir. Les spectres de puissance des composantes apparaissent en pointillé lorsque les éléments de mélange sont négatifs.

	Composante 1	Composante 2	Composante 3	Composante 4
143k03	1	1	0,063 \pm 0,008	0,076 \pm 0,007
143k04	1,011 \pm 0,027	1,023 \pm 0.028	0,030 \pm 0,013	-0,085 \pm 0,014
143k05	1,067 \pm 0,023	1,000 \pm 0.020	0,098 \pm 0,012	0,121 \pm 0,011
217T06	1,174 \pm 0,048	2,974 \pm 0.077	0,288 \pm 0,027	0,449 \pm 0,026
217k01	0,991 \pm 0,043	3,236 \pm 0.083	0,007 \pm 0,019	-0,494 \pm 0,024
217k02	0,957 \pm 0,037	3,386 \pm 0.083	0,000 \pm 0,014	-0,418 \pm 0,017
217k03	0,895 \pm 0,122	2,624 \pm 0.145	-0,075 \pm 0,069	-0,906 \pm 0,089
217k04	0,920 \pm 0,031	3,292 \pm 0.077	0,002 \pm 0,010	-0,603 \pm 0,016
217k06	0,958 \pm 0,033	3,437 \pm 0.081	0,006 \pm 0,011	-0,591 \pm 0,016
353k02	1,448 \pm 0,306	22,7 \pm 0.68	-3,90 \pm 0,22	3,77 \pm 0,14
353k03	1,336 \pm 0,304	22,3 \pm 0.67	-4,04 \pm 0,23	3,92 \pm 0,14
353k04	1,437 \pm 0,343	23,6 \pm 0.74	-4,90 \pm 0,28	3,84 \pm 0,15
353k05	1,323 \pm 0,292	22,2 \pm 0.66	-3,96 \pm 0,23	3,63 \pm 0,13
353k06	1,450 \pm 0,360	23,5 \pm 0.75	-4,95 \pm 0,29	3,92 \pm 0,17
545k01	-18 \pm 5	326 \pm 10.3	100	100

Tab. 7.2: Matrice de mélange estimée sur les données non décorrélées de l’ozone. Les erreurs d’étalonnage ne figurent pas.

Nous utilisons la méthode de séparation de composantes de Wiener en utilisant les paramètres estimés afin d’obtenir des cartes des différentes composantes (aucune correction de la couverture partielle n’est effectuée). Les figures 7.14 et 7.15 montrent les cartes des quatre composantes mesurées.

Les anisotropies du CMB

La première composante est naturellement constituée des anisotropies du CMB. Les paramètres de mélange, qui donnent l’amplitude des anisotropies en unité de température thermodynamique, semblent constants aux erreurs d’estimation et d’étalonnage près. Son spectre spatial de puissance, avant toute correction (filtrage, couverture partielle, etc...), montre un pic autour du multipôle $\ell = 200$. Nous décrirons en détail le spectre de puissance dans la partie 7.3.5. La carte de “Wiener” des anisotropies du CMB montre des structures aux échelles angulaires de l’ordre de 1 degré. La figure 7.17 montre un zoom de la carte de CMB séparée sur une zone redondante de la couverture d’Archeops à haute latitude galactique.

La carte de CMB séparée ne présente aucune structure à des échelles supérieures à quelques dizaines de degrés. Ces structures apparaissent en revanche sur les cartes de l’expérience WMAP ou COBE. C’est la conséquence du filtrage effectué dans les séries temporelles.

Notons $W(\ell)$ la fonction de transfert de la carte d’anisotropies séparée par la méthode

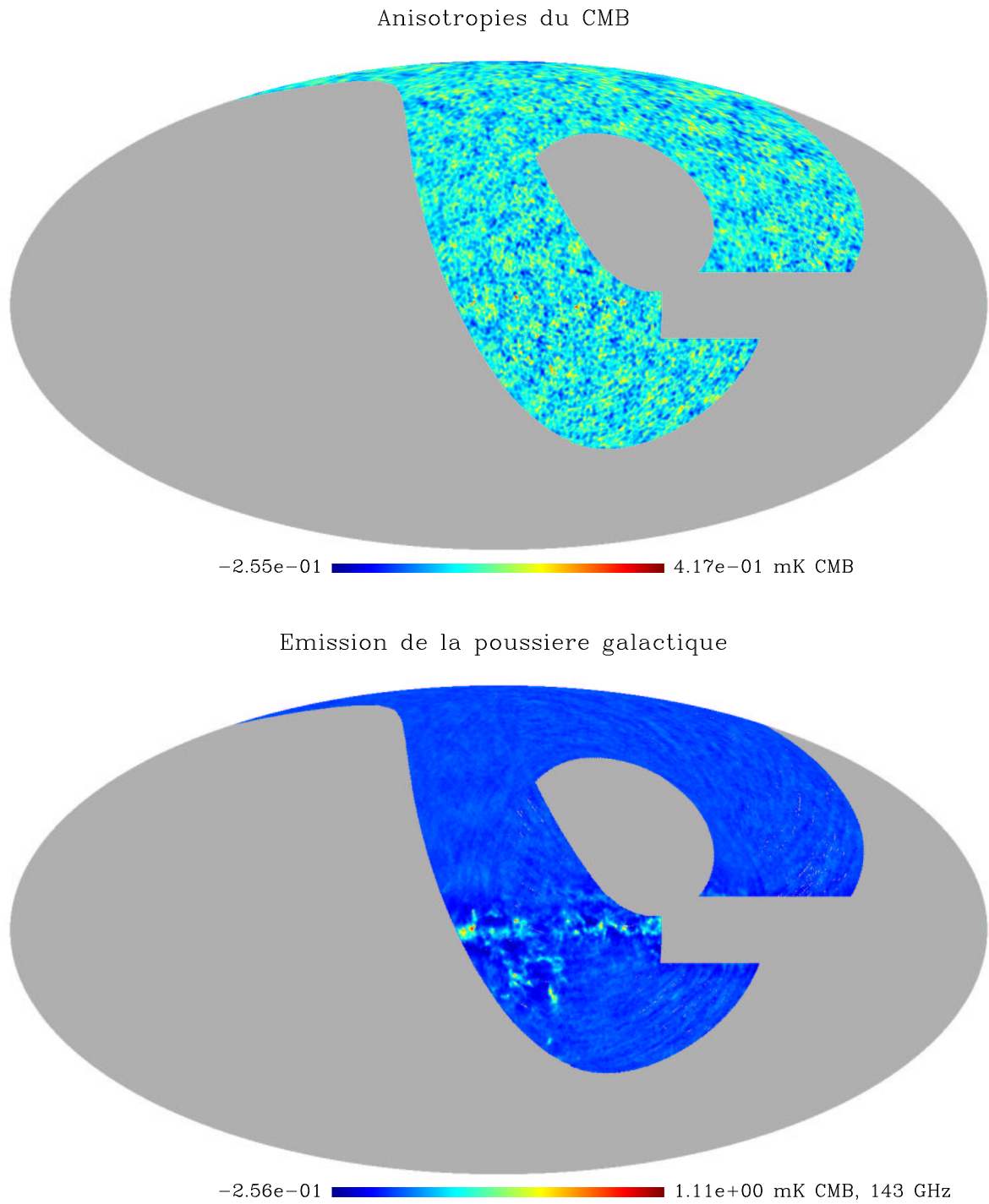


Fig. 7.14: Cartes de composantes obtenues à partir des données non décorréliées de l'ozone. La première composante est le CMB, la seconde l'émission de la poussière galactique (composantes 1 et 2 respectivement dans la table 7.2).

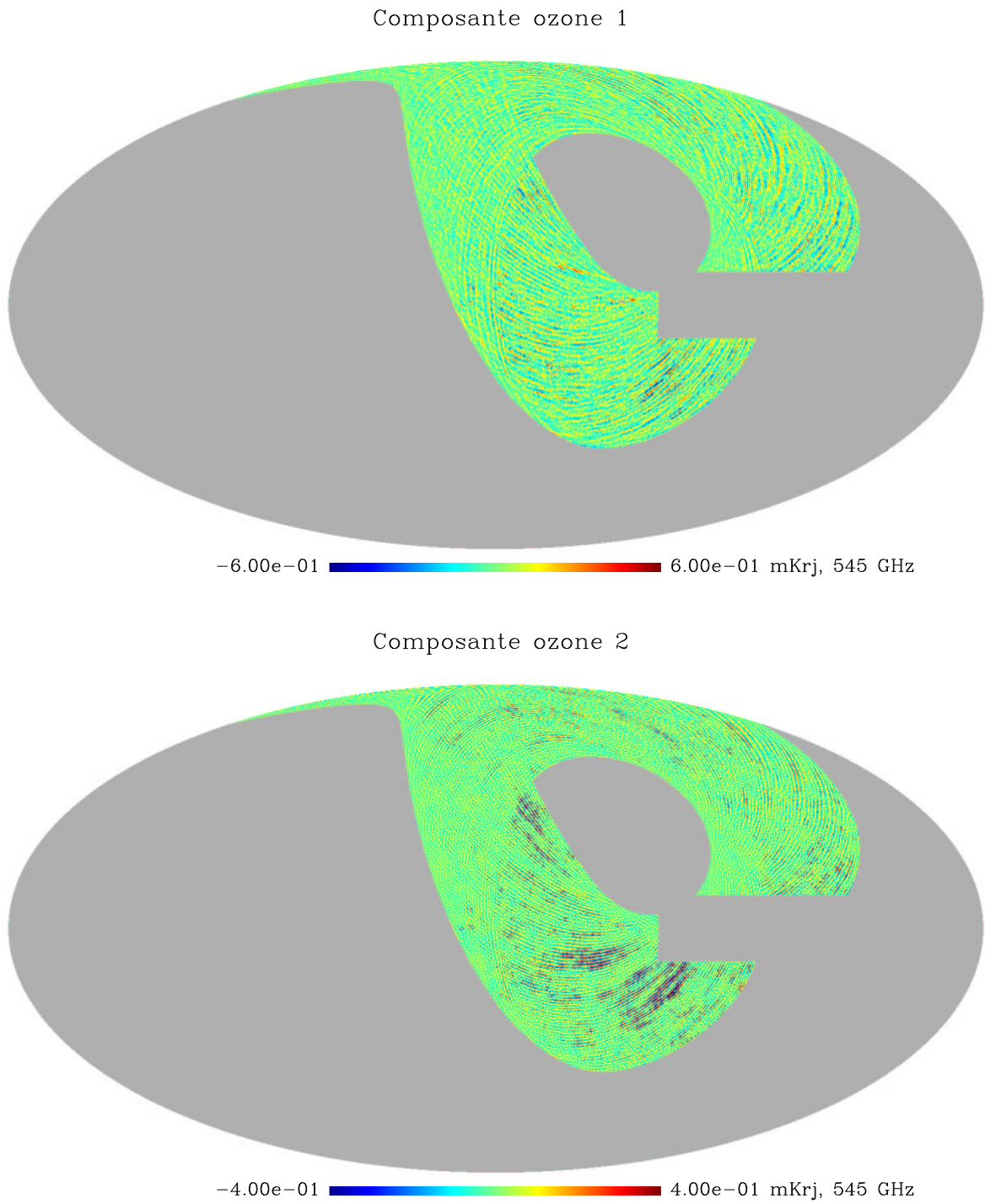


Fig. 7.15: Cartes de composantes résiduelles obtenues à partir des données non décorréées de l'ozone (composantes 3 et 4 respectivement dans la table 7.2).

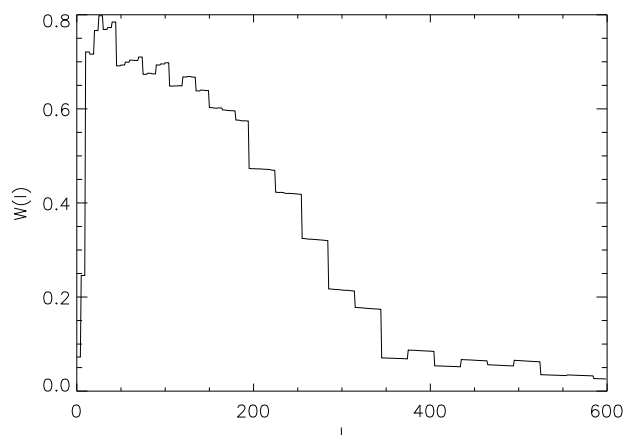


Fig. 7.16: Fonction de transfert des anisotropies du CMB dans la carte séparée par la méthode de Wiener, en utilisant les paramètres estimés. Elle est donnée par $T(\ell) = \langle \tilde{s}(\ell, m) \rangle_m / \langle s(\ell, m) \rangle_m$. Il s'agit du produit de la fonction de transfert du filtrage des séries temporelles, avec le filtre de Wiener. Le filtre de Wiener possède une structure en créneaux car les paramètres de spectres sont estimés par la méthode MDMC pour chaque bande spectrale, et non pas pour chaque valeur de ℓ .

de Wiener. Cette fonction, définie par la relation : $\tilde{s}_{\text{CMB}}(\ell, m) = W(\ell)s_{\text{CMB}}(\ell, m) + \epsilon(\ell, m)$, est donnée par l'équation 4.18 et dépend des paramètres estimés par la méthode d'ajustement spectral MDMC. La figure 7.16 montre la fonction de transfert de la carte de CMB séparée en fonction du multipôle ℓ . Cette dernière inclut l'effet de filtrage des séries temporelles moyenné sur m et le filtre de Wiener $W(\ell)$. Le filtre des séries temporelles a une influence sur les grandes échelles angulaires $\ell \lesssim 50$. Le filtre de Wiener agit à toutes les échelles et devient important à partir de $\ell = 200$ approximativement. Les fluctuations aux échelles angulaires inférieures à 1 degré environ sont soustraites sur la carte.

Certaines régions du ciel couvertes par Archeops ont été cartographiées par d'autres expériences. C'est le cas en particulier de l'expérience MAXIMA qui a observé une petite portion du ciel (de taille $10^\circ \times 10^\circ$ environ) à haute latitude galactique, et bien sûr de l'expérience WMAP qui a récemment observé la totalité du ciel. La figure 7.18 montre la carte publiée de l'expérience MAXIMA ainsi que la carte d'Archeops obtenue par notre méthode, découpées sur la région du ciel commune. La corrélation est évidente sur des échelles angulaires de l'ordre de quelques degrés. Aux plus petites échelles, la carte séparée "Archeops" (et aussi la carte mesurée par MAXIMA dans une moindre mesure) possède une contamination importante par le bruit résiduel, non totalement filtré par la méthode de Wiener.

La figure 7.19 montre la somme et la différence de notre carte d'anisotropies séparée avec la carte d'anisotropies de WMAP (Bennett et al., 2003b) recalculée par Teg-

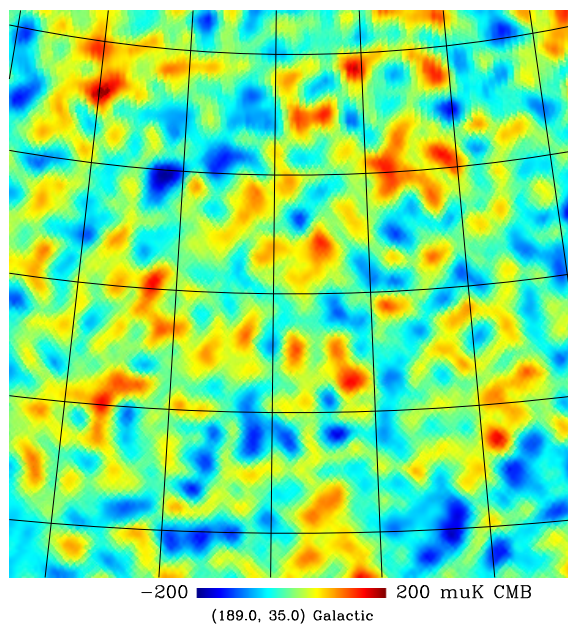


Fig. 7.17: Carte des anisotropies du CMB avec Archeops sur un domaine du ciel à forte redondance des observations. La carte est obtenue après filtrage de Wiener en aveugle sur l'ensemble du ciel. L'intervalle entre deux lignes iso-latitudes qui apparaît sur la carte est de 5 degrés.

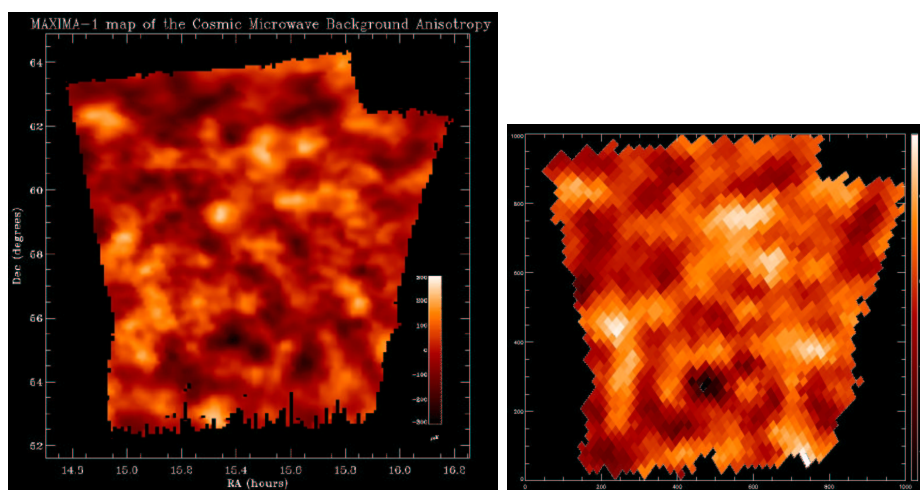


Fig. 7.18: Comparaison entre MAXIMA (figure de gauche) et Archeops (figure de droite). Les deux cartes résultent d'un filtrage de Wiener (voir Hanany et al. (2000) pour la carte MAXIMA). La résolution de la carte d'Archeops est plus faible. Les pixels qui apparaissent sont ceux utilisés pour la projection sur l'ensemble du ciel.

mark (2003). La carte de la différence est dominée par les structures du CMB à petite échelle angulaire (inférieures à 1 degré environ) présentes dans la carte WMAP. Relativement peu de résidus galactiques sont visibles au niveau de l'équateur, indiquant une séparation efficace des composantes dans les cartes mesurées par Archeops, puisque l'expérience WMAP est sensible à des avant-plans différents.

L'émission de la poussière

La seconde composante estimée est l'émission de la poussière galactique. Les paramètres de mélange relatifs (colonne 2 de la table 7.2) semblent constants pour les détecteurs observant le ciel à la même fréquence. Ces paramètres augmentent significativement avec la fréquence d'observation en unité de température CMB. Ils sont compatibles avec la loi d'émission attendue pour la poussière. Toutes les structures spatiales de l'émission de la poussière détectées sont concentrées au niveau du plan galactique. On peut reconnaître les principaux nuages tels que le Taureau et les Gémeaux. Au bord de chaque structure intense apparaît un creux. Il s'agit d'un effet du filtrage dans les séries temporelles. Les structures très diffuses de la poussière proches du plan galactique, qui sont visibles sur les cartes du satellite IRAS, ne sont pas présentes sur la carte séparée. Il s'agit à nouveau d'une conséquence du filtrage. Une contamination importante par les dérives basses fréquences du bruit reprojctées est visible sur la carte séparée. Les stries apparaissent essentiellement à haute latitude galactique.

Les composantes résiduelles

Plusieurs indices semblent montrer que les composantes résiduelles 3 et 4 sont dues à l'émission de l'atmosphère. Tout d'abord, les cartes séparées sont très striées. On peut raisonnablement penser que ces composantes varient naturellement au cours du temps (et donc dans les séries temporelles) plutôt que sur le ciel. Ensuite, les éléments de la matrice de mélange qui correspondent à ces composantes (table 7.2) croissent fortement (en valeur absolue) en fonction de la fréquence d'observation des bolomètres. Un spectre d'émission fortement croissant est attendu pour l'ozone dans l'atmosphère. Il reste à élucider les changements de signe des paramètres de mélange suivant les détecteurs considérés. Prenons en particulier la composante 4 qui est toujours dominante par rapport à la composante 3. A l'aide de la figure 7.5 montrant la position des détecteurs dans le plan focal, on peut remarquer que la composante apparaît toujours positivement pour les détecteurs appartenant aux première et troisième lignes du plan focal (en partant du haut), et négativement pour les détecteurs appartenant aux deuxième et quatrième lignes. Le spectre de puissance de la composante (voir la figure 7.13) possède un pic important autour de $\ell = 400$. L'échelle angulaire qui

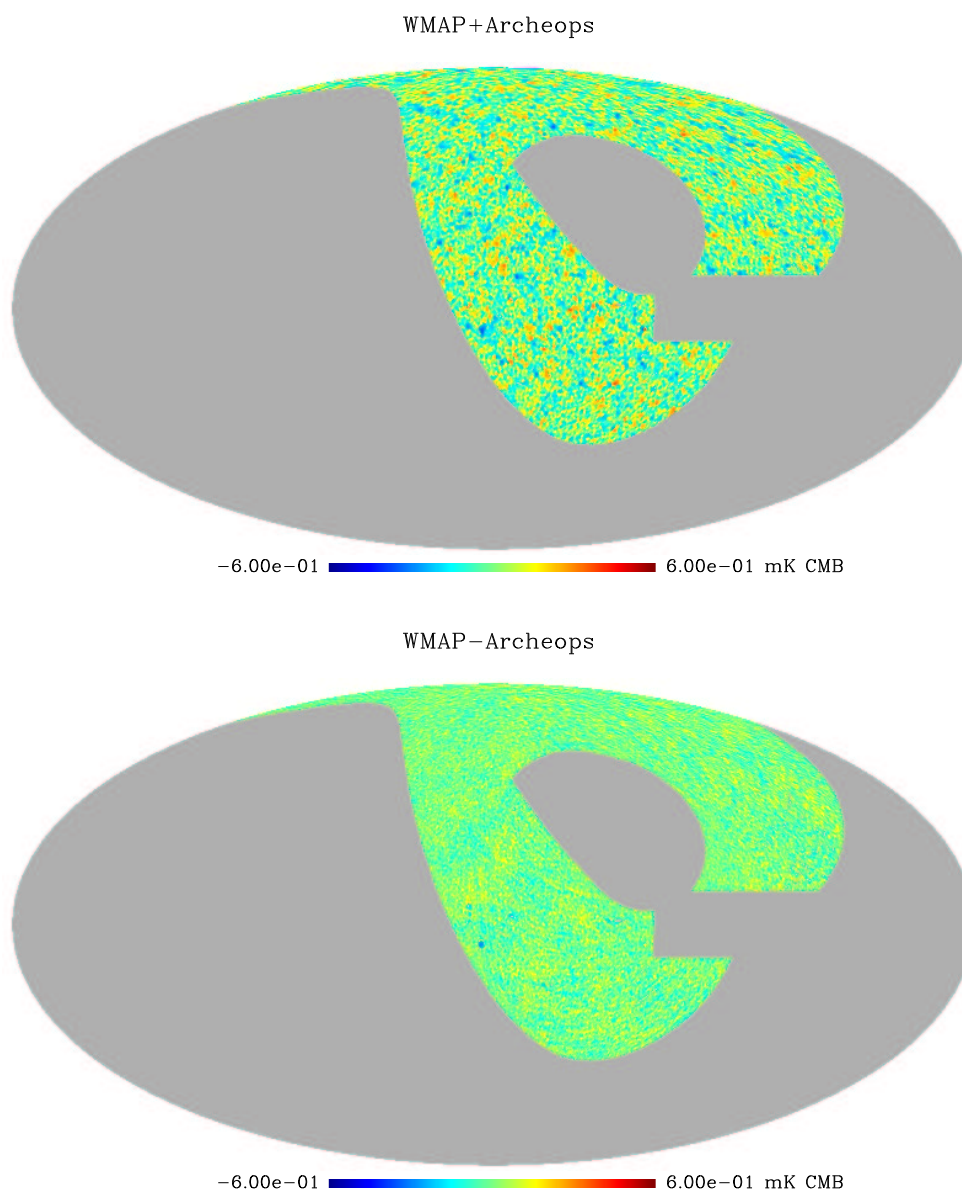


Fig. 7.19: Somme (en haut) et différence (en bas) entre les cartes d'anisotropies du CMB obtenues d'une part par l'analyse des observations de WMAP (voir Bennett (2003b) pour les résultats de l'expérience WMAP, la carte utilisée a été recalculée par Tegmark, 2003) et d'autre part à l'issue de la séparation des composantes dans les observations d'Archeops. La carte "WMAP" est produite après relecture d'une carte d'anisotropies traitée en simulant la stratégie d'observation d'Archeops. La série "temporelle" produite est filtrée à basse fréquence, avec un filtre identique à celui utilisé pour Archeops (en utilisant le pointage du détecteur 143k03 qui contribue le plus à la carte séparée), puis est reprojétée.

correspond à $\ell = 400$ est typiquement de $30'$ d'arc. Il s'agit exactement de la distance reprojctée sur le ciel entre deux lignes du plan focal.

Considérons des fluctuations dans les séries temporelles fortement corrélées entre les différents détecteurs. Supposons que ces dérives varient avec des fréquences telles que une fois reprojctées (et compte tenu de la stratégie de balayage d'Archeops), elles décrivent des anneaux sur les cartes, et que ces anneaux ont une largeur correspondant à la distance entre deux lignes du plan focal. Au même instant, deux détecteurs sur des lignes différentes (mais voisines) reçoivent le même signal de la composante considérée, mais pointent dans des directions décalées d'une demie période par rapport aux anneaux créés par la composante reprojctée. Le patron sur la carte, observé par le premier détecteur est simplement l'opposé de celui observé par le second. Dans ce cas précis, le modèle des cartes d'observations pour la composante $s(\vec{r})$, $y_d(\vec{r}) = A_d s(\vec{r})$ est parfaitement vérifié et A_d change de signe suivant la ligne du plan focal où se trouve le détecteur d . Le spectre de puissance de la composante montre naturellement un pic à une échelle angulaire égale à la distance entre les détecteurs.

Revenons à notre problème réel. La méthode MDMC capture, en réalité une partie de l'émission atmosphérique possédant la propriété décrite dans notre exemple précédent et donne lieu à la composante 4. Les fluctuations de l'ozone à des fréquences spatiales différentes sont mal ajustées par notre modèle, et se retrouvent en grande partie dans le bruit estimé et aussi dans les autres composantes.

D'après la figure 7.13, le spectre de puissance de la composante 3 montre deux pics, le premier autour des multipôles $\ell = 200 - 250$, le second autour de $\ell = 600$. Ils correspondent tous deux respectivement à 2 et $1/2$ fois la distance entre deux lignes du plan focal. Intéressons nous à l'amplitude relative des deux composantes résiduelles. Cette information est encore une fois donnée par la figure 7.13. Sur les vignettes correspondant aux détecteurs à 353 et 545 GHz, la somme des spectres de puissance des deux composantes semble croissant. C'est ce que l'on attend pour une composante fortement striée telle l'ozone. Ainsi, cette composante, présentant des fluctuations à 2 fois la distance entre deux lignes du plan focal, est bien ajustée à 353 et 545 GHz, et ces détecteurs sont situés précisément sur des lignes paires. On peut donc prévoir un très mauvais ajustement pour des détecteurs placés sur les lignes impaires, c'est ce que l'on constate sur la figure 7.13 pour les détecteurs à 217GHz où la composante est quasi-nulle ¹. Cela explique aussi le changement de signe de la composante entre 353 et 545 GHz.

A cause de ce comportement à 217 GHz, on peut penser que le spectre de puissance du CMB estimé autour du multipôle $\ell \simeq 250$ contient un niveau de contamination par l'ozone non négligeable.

¹ On peut remarquer que le détecteur 217T06 est situé sur la même ligne du plan focal que les détecteurs à 353 GHz, et il s'agit du seul détecteur pour lequel la troisième composante est significativement détectée (voir la table 7.2).

Bolomètre	coefficient d'étalonnage en mK_{CMB}/mV
143k03	a
143k04	$(1.62 \pm 0.06) \times a$
143k05	$(1.09 \pm 0.03) \times a$
217k01	$(2.97 \pm 0.16) \times a$
217k02	$(2.81 \pm 0.10) \times a$
217k03	$(19.1 \pm 5.4) \times a$
217k04	$(1.36 \pm 0.04) \times a$
217k06	$(1.48 \pm 0.04) \times a$

Tab. 7.3: Coefficients de l'étalonnage relatif obtenus à l'aide de la méthode MDMC, mesurés sur les anisotropies du CMB. Le détecteur 143k03 sert de référence, a est son coefficient d'étalonnage absolu.

7.3.4 Contraintes apportées par la mesure de la matrice de mélange

L'étalonnage relatif des détecteurs

Les paramètres de mélange d'une composante astrophysique qui correspondent aux détecteurs observant le ciel à la même fréquence, doivent être constants si ils sont exprimés en unités physiques. On suppose pour cela que les bandes de fréquence des détecteurs sont identiques. La mesure des paramètres de mélange des anisotropies du CMB pour les différents détecteurs à 143 GHz ou à 217 GHz peut alors permettre leur étalonnage relatif. De même l'émission de la poussière peut être utilisée à 353 GHz. Si on admet que la loi d'émission des anisotropies du CMB est la dérivée d'une loi de corps noir, on peut utiliser cette information pour étalonner les détecteurs à des fréquences différentes.

Afin de nous affranchir au mieux des effets systématiques éventuels introduits par l'émission de l'atmosphère, qui comme on l'a vu est assez mal modélisée, nous utilisons les cartes préparées à partir des données décorréelées de l'ozone (jeu de cartes II). La seule composante significative, détecté par la méthode MDMC est le CMB. La table 7.3 donne les coefficients de l'étalonnage relatif obtenus par rapport au détecteurs 143k03.

Le point intéressant est que la précision de l'étalonnage relatif sur les anisotropies du CMB, à l'aide de la méthode MDMC, est supérieure à celle obtenue par des méthodes indépendantes (dipôle, Jupiter, etc...).

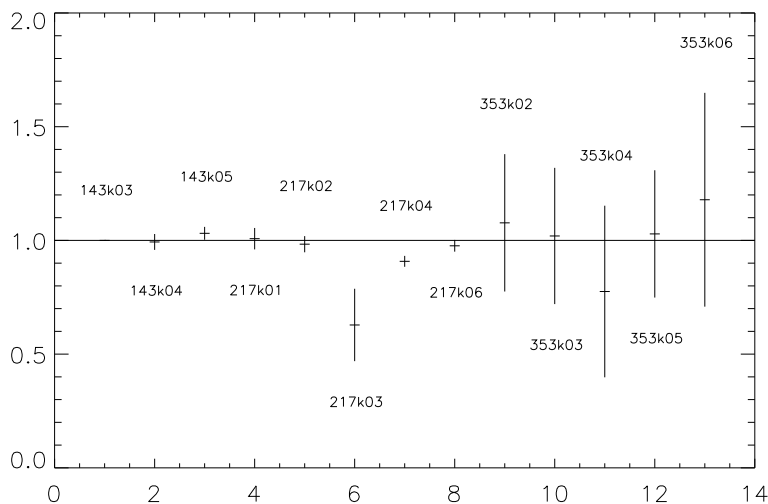


Fig. 7.20: Mesures de la loi d'émission des anisotropies du CMB. Le spectre théorique est par définition constant en unité de température CMB. Le bolomètre 143k03 est choisi comme référence.

Contraintes sur la “couleur” des anisotropies du CMB

Nous adoptons ici une autre approche que dans le paragraphe précédent. Plutôt que d'utiliser la mesure des anisotropies pour étalonner les bolomètres en admettant leur loi d'émission, nous vérifions effectivement la loi d'émission des anisotropies du CMB en utilisant les paramètres de l'étalonnage obtenus par des méthodes indépendantes.

Nous utilisons pour cet exercice les cartes d'observation des bolomètres à 143 et 217 GHz préparées après traitement de l'émission de l'ozone. En addition, nous utilisons les cartes à 353 GHz n'ayant subi aucune décorrélation de l'ozone, que nous masquons pour ne garder que la partie aux latitudes galactiques supérieures à 30° . La composante atmosphérique est *a priori* présente uniquement sur les cartes à 353 GHz, ainsi aucune corrélation gênante (car mal modélisée) pour l'application de la méthode n'est introduite entre les bolomètres à 143 ou 217 GHz et à 353 GHz. Comme les 5 bolomètres à 353 GHz sont placés sur la même ligne du plan focal, et que la composante atmosphérique varie à relativement basse fréquence dans les séries temporelles, les différences de pointage des bolomètres n'ont pas une grande influence sur la forme spatiale de la composante une fois reprojctée.

L'analyse jointe des cartes aux 3 fréquences par notre méthode permet, tout d'abord, d'identifier les anisotropies du CMB à toutes les fréquences d'observation. La figure 7.20 montre les contraintes obtenues sur la loi d'émission des anisotropies du CMB. Les valeurs calculées sont les paramètres de mélange multipliés par les coefficients

d'étalonnage obtenus sur le dipôle et Jupiter. Les erreurs d'étalonnage ne sont pas représentés sur le graphique. Nous avons recalé la courbe théorique, constante en unité de température CMB, par rapport au détecteur 143k03. Nous pouvons constater une détection significative des anisotropies du CMB à 353 GHz. Les points obtenus sont tout à fait compatibles avec la loi théorique, même pour les bolomètres 217k03 et 217k04 si l'on tient compte de l'erreur d'étalonnage.

Rem : Comme nous l'avons prédit, une composante corrélée avec tous les bolomètres à 353 GHz est détectée. Elle est négligeable pour les bolomètres aux autres fréquences. Cette composante résulte probablement d'un mélange entre l'émission de la poussière à haute latitude galactique et de l'émission de l'atmosphère.

Contraintes sur la loi d'émission de la poussière

La loi d'émission de la poussière peut être contrainte à partir de la mesure des paramètres de mélange en utilisant des cartes incluant des régions proches (ou au niveau) du plan galactique. Nous n'effectuons ainsi aucun traitement de l'ozone afin de ne pas affecter le signal galactique. La figure 7.21 présente les paramètres de mélange obtenus, déjà exposés dans la partie 7.3.3 (on rappelle que les cartes ne contiennent pas la région du Cygne). Un modèle théorique de l'émission de la poussière de la forme : $I(\nu) \propto \nu^\alpha B_\nu(T_d = 17,5 \text{ K})$ est comparé aux données. L'émissivité α qui s'ajuste le mieux aux mesures est voisine de 1,6. Une correction de couleur de l'émission de la poussière a été appliquée (cette correction est nécessaire car les bandes spectrales d'Archeops sont de 25% environ). La température T_d de la poussière est assez mal contrainte par les mesures d'Archeops.

Ces résultats sont préliminaires et demandent à être raffinés. Par exemple, l'émission de l'ozone, bien que partiellement séparée, peut induire un biais dans l'estimation des paramètres de mélange. Ensuite, les erreurs d'étalonnage ne sont pas prises en compte pour cette analyse. En particulier, les erreurs de l'étalonnage relatif des détecteurs à 353 GHz sont corrélées puisqu'il existe une incertitude sur le flux global de Jupiter. Ceci peut modifier grandement les résultats obtenus.

Une analyse conjointe des expériences Archeops, DIRBE et IRAS sur des petites portions du ciel par la méthode MDMC pourrait permettre d'apporter de fortes contraintes sur la loi d'émission de la poussière.

7.3.5 *Le spectre de puissance du CMB*

Des pseudo-spectres aux spectres de puissance

Le spectre de puissance "brut" (ou pseudo-spectre) des anisotropies du CMB que nous avons obtenu par la méthode d'ajustement spectral doit être corrigé de plusieurs

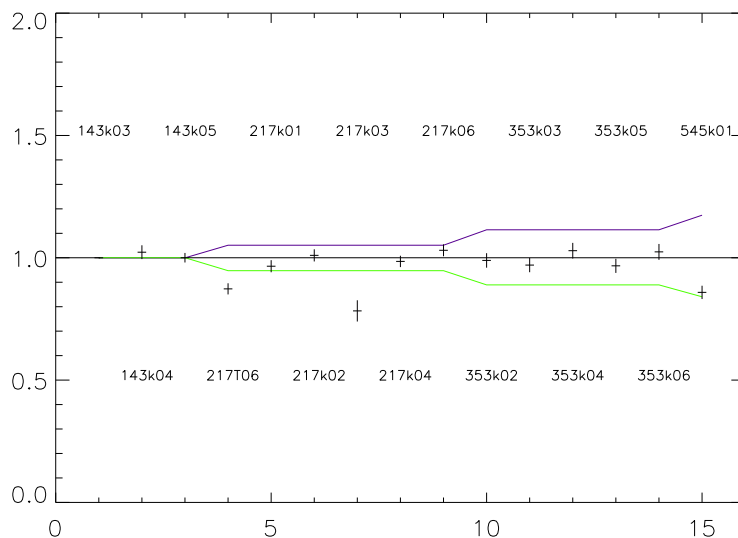


Fig. 7.21: Contraintes sur la loi d'émission de la poussière. Les points sont déterminés à l'aide de la méthode d'ajustement spectral et sont réétalonnés à l'aide des mesure du dipôle à 143 et 217 GHz et de Jupiter à 353 et 545 GHz. En ordonnée nous mesurons l'écart relatif avec le modèle d'émission $I(\nu) \propto \nu^{1.63} B_\nu(T_d = 17,5 \text{ K})$, qui semble être représentatif des données ($B_\nu(T_d)$ est la loi de corps noir et T_d la température des grains de poussière). Les courbes verte et bleue sont des prédictions des modèles pour l'intensité $I(\nu)$ de la forme ci-dessus avec des émissivités de 1,5 et 1,75 respectivement. Les modèles sont recalés par rapport au détecteur 143k03 (même si l'émission de la poussière est fortement croissante avec la fréquence d'observation le détecteur 143k03 est adapté à sa mesure).

effets afin d'en obtenir une estimation non biaisée. Il convient de corriger :

- l'effet de la couverture partielle du ciel
- l'effet du filtrage des données ordonnées en temps
- l'effet de la pixellisation

On rappelle que l'effet du lobe des détecteur à été corrigé durant l'étape d'ajustement spectral.

Le pseudo-spectre de puissance moyenné par bande vérifie :

$$\langle \tilde{C}(q) \rangle = \frac{1}{n_q} \sum_{\ell \in \mathcal{D}_q} \sum_m \langle \tilde{s}(\ell, m) \tilde{s}(\ell, m)^\dagger \rangle \quad (7.9)$$

On écrit cette relation sous forme matricielle par commodité :

$$\langle \tilde{C}(q) \rangle = \sum_{\ell} P_{q\ell} \langle \tilde{s}(\ell, m) \tilde{s}(\ell, m)^{\dagger} \rangle \quad (7.10)$$

où $P_{q\ell}$ est une matrice permettant le moyennage par bande définie par :

$$P_{q\ell} = \frac{2\ell + 1}{n_q}, \quad \text{pour } \ell_{\min}(q) \leq \ell \leq \ell_{\max}(q) \quad (7.11)$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs} \quad (7.12)$$

L'expression 7.7 permet de relier les coefficients réels de la décomposition en harmoniques sphériques des anisotropies $s(\ell, m)$, à ceux mesurés sans correction sur une carte partiellement couverte $\tilde{s}(\ell, m)$. On peut alors montrer la relation suivante (voir l'article Hivon et al. (2002) pour plus de détails) :

$$\langle \tilde{C}(q) \rangle = \sum_{\ell} P_{q\ell} \sum_{\ell'} M_{\ell\ell'} C(\ell') \quad (7.13)$$

où $C(\ell)$ est le spectre de puissance théorique. La matrice de couplage $M_{\ell\ell'}$ est donnée par :

$$M_{\ell\ell'} = \frac{2\ell' + 1}{4\pi} \sum_{\ell''} (2\ell'' + 1) \mathcal{W}_{\ell''} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & \ell'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (7.14)$$

$\begin{pmatrix} \ell & \ell' & \ell'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ représente les symboles de Wigner $3-j$, et $\mathcal{W}_{\ell''}$ le spectre de puissance d'une carte possédant des 1 dans les pixels "vus" par l'expérience et 0 ailleurs.

Afin d'établir la relation 7.13, nous avons négligé les effets de filtrage dans les séries temporelles, ainsi que les effets de pixels. Ils peuvent être modélisés avec une bonne approximation comme une fonction de transfert F_{ℓ} multiplicative (voir la thèse de A. Amblard). La relation entre les spectres de puissance devient alors :

$$\langle \tilde{C}(q) \rangle = \sum_{\ell} P_{q\ell} \sum_{\ell'} M_{\ell\ell'} F_{\ell'} C(\ell'). \quad (7.15)$$

Il est nécessaire d'inverser cette relation pour obtenir une estimée du spectre de puissance $C(\ell)$. La première difficulté est que la matrice de couplage $M_{\ell\ell'}$ n'est pas inversible. Nous allons supposer que $C(\ell)$ est constant par domaine spectral. Définissons l'opérateur suivant :

$$Q_{\ell q} = 1, \quad \text{pour } \ell_{\min}(q) \leq \ell \leq \ell_{\max}(q) \quad (7.16)$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs} \quad (7.17)$$

Si $C(\ell)$ est effectivement constant par domaine spectral alors :

$$C(\ell) = \sum_q Q_{\ell q} C(q) \quad (7.18)$$

Ceci, à partir de 7.15, nous conduit à la relation matricielle (la somme sur les indices répétés est implicite) :

$$\langle \tilde{C}(q) \rangle = P_{q\ell} M_{\ell\ell'} F_{\ell'} Q_{\ell'q'} C(q') \quad (7.19)$$

Le spectre de puissance est alors estimé par :

$$\hat{C}(q) = K_{qq'}^{-1} \tilde{C}(q') \quad (7.20)$$

où $K = PMFQ$ est en général une matrice inversible.

En pratique, la matrice $M_{\ell\ell'}$ est calculée numériquement en appliquant la relation 7.14. La fonction de transfert F_ℓ est évaluée par Monte Carlo.

Détermination des erreurs

Les barres d'erreurs sont prédites dans un premier temps par le calcul du hessien (voir la section 6.2.4) et sont ensuite corrigées pour tenir compte de plusieurs effets. Il est supposé implicitement pour le calcul des erreurs que les composantes et le bruit sur les cartes sont stationnaires, isotropes et gaussiens. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées tout d'abord en raison de la couverture partielle du ciel. En première approximation, les barres d'erreurs sont donc sous-estimées d'un facteur égal à la racine de la fraction de couverture du ciel quelle que soit la bande spectrale q considérée. Nous corrigeons les erreurs estimées en conséquence. Pour les plus bas modes $\ell \lesssim 10$, cette approximation n'est plus valable. Ensuite, le filtrage des séries temporelles dont l'effet est essentiellement présent à bas ℓ doit être pris en compte pour le calcul des erreurs, en raison de son caractère anisotrope sur les cartes. Nous avons recours à des méthodes de Monte Carlo sur des simulations de CMB pur observées avec la stratégie d'Archeops. La figure 7.22 montre la dispersion des valeurs du spectre de puissance moyennées par bandes spectrales sur 60 réalisations des anisotropies du CMB. Ces dernières sont simulées et observées avec la stratégie d'Archeops. Le filtrage est inclus dans les simulations. Les spectres de puissance estimés sont corrigés de la couverture partielle. La dispersion est comparée à la valeur prédite qui est donnée par la variance cosmique multipliée par la racine carrée de la fraction de couverture du ciel. Le désaccord à bas ℓ est dû au filtrage.

Un des problèmes majeurs pour la prédiction des erreurs est la non-stationnarité des composantes et du bruit ² sur la zone du ciel couverte. Ceci rend approximative l'estimation de nos erreurs du spectre de puissance du CMB pour les grandes valeurs de

² Le bruit est non-stationnaire sur les cartes en raison des variations importantes du temps d'observation de chaque pixel.

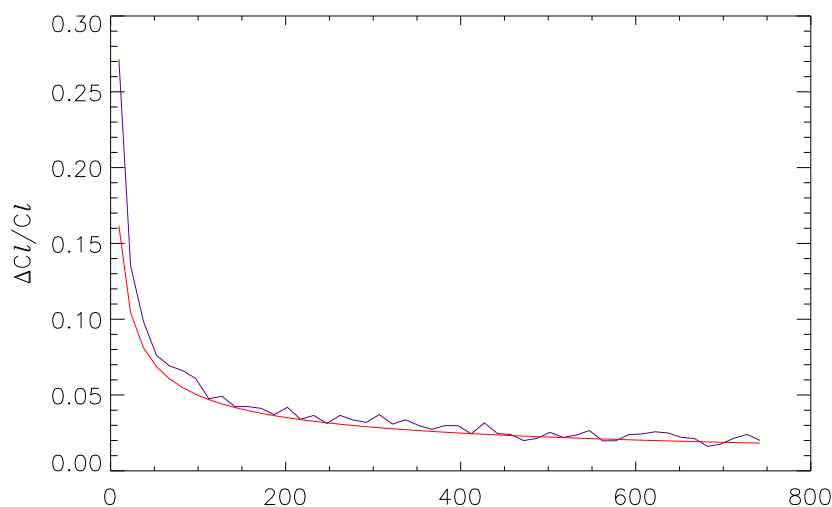


Fig. 7.22: Dispersion “relative” des valeurs du spectre de puissance moyennées par bandes spectrales : $\Delta C(q)/C(q)$. La courbe bleue est la dispersion mesurée à l’aide de 60 simulations de cartes de CMB observées avec la stratégie de balayage d’Archeops, en incluant le filtrage. La courbe rouge indique la variance cosmique multipliée par la racine carrée de la fraction de couverture du ciel. Les deux courbes montrent un bon accord, excepté à bas ℓ où l’effet du filtrage est important.

ℓ , où la variance du bruit domine sur la variance cosmique. Cela concerne les valeurs de ℓ supérieures à 250 environ. Une détermination plus précise des erreurs pourra être réalisée à l’aide d’une méthode de Monte Carlo. Il sera nécessaire de produire des simulations complètes et précises des observations de la mission. Ce travail n’est pas achevé au moment de la soumission de cette thèse.

Les résultats

Nous ne montrons pas les résultats obtenus avec la méthode d’estimation spectrale pour des valeurs de ℓ supérieures à 350 environ. Cette limite est fixée par le dernier point déterminé par la collaboration. La figure 7.23 montre le spectre de puissance corrigé, estimé en partant des cartes d’observation non-déconvoluées de l’ozone (jeu de cartes I). Le modèle théorique standard ajusté sur l’ensemble des mesures du CMB à ce jour (l’expérience WMAP fournit l’essentiel de l’information) apparaît sur la figure. On rappelle que le pseudo-spectre de puissance mesuré à l’aide de la méthode MDMC est présenté dans la figure 7.13.

Tout d’abord, le premier pic acoustique est mesuré avec une précision satisfaisante. Les points estimés sur la partie croissante du pic sont tout à fait compatible avec le modèle

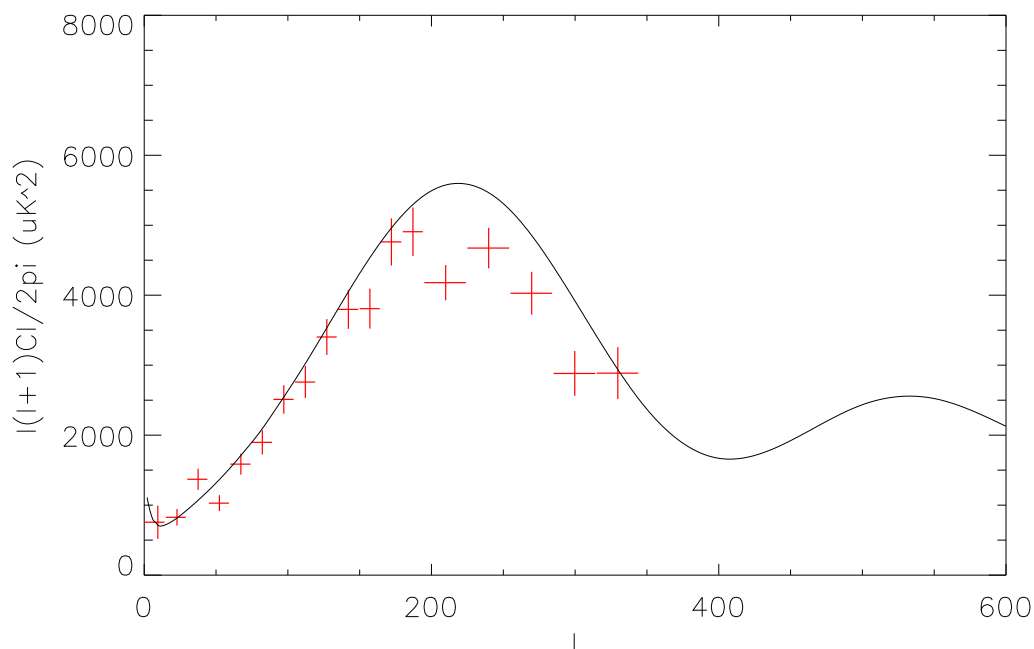


Fig. 7.23: Spectre de puissance des anisotropies du CMB estimé avec la méthode MDMC sur les cartes non-décorrélées de l'ozone couvrant 27% du ciel (en rouge). Le spectre de puissance est corrigé des effets de couverture partielle du ciel, de filtrage des données ordonnées en temps et de la pixellisation. Le modèle théorique standard est représenté en noir.

théorique si l'on tient compte de l'incertitude d'étalonnage absolue du détecteur 143k03 qui est de l'ordre de 10%. En revanche, si on recalcule sur le spectre théorique l'ensemble des points du spectre estimés au plus bas ℓ (inférieurs à 180 environ), les points à partir du sommet du pic jusqu'au creux apparaissent systématiquement sous-estimés.

Plusieurs effets dans les données mal modélisés pourraient expliquer cette incompatibilité au niveau de la descente du premier pic. Le premier candidat est l'asymétrie et la non-gaussianité du lobe des détecteurs. Le second est le filtrage des séries temporelles qui, en raison du pointage différent des détecteurs, a une influence sur la forme spatiale des anisotropies dépendant du détecteur considéré. Le troisième, plus probable, est l'émission de l'ozone. L'ensemble de ces effets peuvent être testés sur des simulations.

La figure 7.24 montre le spectre de puissance estimé à partir du jeu de cartes II, décorrélé de l'ozone. Rappelons que seules les latitudes galactiques supérieures à 30° sont prises en compte. Contrairement au spectre précédent, celui-ci ne montre pas de problème de normalisation significatif au niveau de la montée du pic. Cette différence

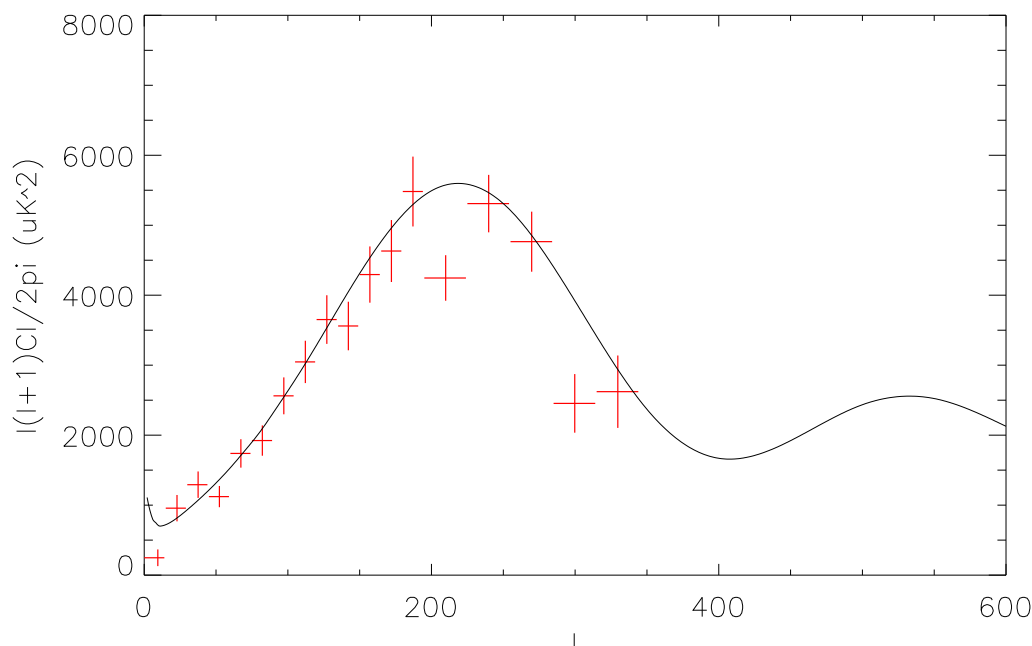


Fig. 7.24: Spectre de puissance des anisotropies du CMB estimé avec la méthode MDMC sur les cartes décorréélées de l'ozone couvrant 12% du ciel (en rouge). Le spectre théorique est aussi indiqué.

entre les deux spectres estimés pourrait être expliquée marginalement par l'erreur commise sur le coefficient de mélange (au carré) relatif au 143k03. Cette erreur est inférieure à 8% (indépendamment de l'erreur sur le coefficient de l'étalonnage absolu sur le dipôle qui est le même pour les deux spectres). Il faut toutefois noter que les deux jeux de cartes ne sont, bien sûr, pas indépendants. Sur la partie décroissante du premier pic, le spectre de puissance estimé sur le jeu de cartes II montre un désaccord avec le spectre théorique moins prononcé.

Le point intéressant est le saut visible à $\ell \simeq 40 - 50$ sur les deux spectres estimés et aussi sur le spectre mesuré par l'expérience WMAP (Hinshaw et al., 2003). A $\ell \simeq 200$ un creux important est mesuré dans les données Archeops. Il est visible sur le spectre de puissance WMAP mais semble moins prononcé. Il pourrait résulter d'un effet systématique dans les données Archeops (il apparaît aussi sur le spectre de puissance publié par la collaboration Archeops).

La figure 7.25 permet de comparer le spectre de puissance estimé à partir du jeu de cartes I et le spectre de puissance publié par la collaboration Archeops³. Les deux spectres sont compatibles à moins de 1 déviation standard après un ajustement de

³ On rappelle que les jeux de données utilisées pour les deux analyses ne sont pas identiques. Les portions du ciel utilisés, ainsi que les traitements effectués dans les séries temporelles sont différents.

leurs amplitudes. Les erreurs d'estimation du spectre de puissance obtenu avec la

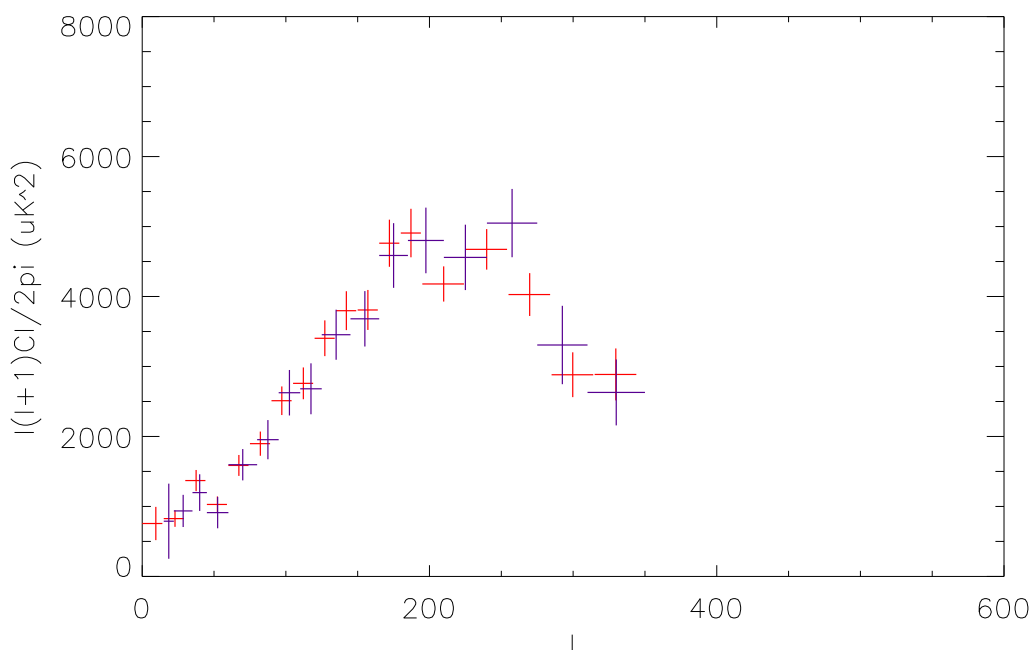


Fig. 7.25: Spectres de puissances estimés avec les données Archeops par deux méthodes différentes. En bleu sont représentés les points publiés, en rouge les points obtenus avec la méthode d'estimation spectrale MDMC. Les données utilisées pour les deux analyses ne sont pas identiques. Le spectre de puissance publié a été mesuré sur 12% du ciel à l'aide des données décorréélées de l'ozone. Le spectre mesuré par notre méthode est obtenu sur les données non-décorréélées de l'ozone et sur 27% du ciel.

méthode d'estimation spectrale MDMC sont plus faibles d'un facteur $\sqrt{2}$ à bas ℓ (où la variance cosmique domine les erreurs) car la fraction de couverture du ciel utilisée est deux fois plus grande. Pour les valeurs de ℓ supérieures à 200, le rapport entre les barres d'erreurs obtenues avec les deux méthodes est de l'ordre de 2. Davantage de bolomètres sont utilisés pour l'analyse MDMC.

Mesure de la qualité de l'ajustement

Nous avons vu dans le paragraphe intitulé "Tests de la cohérence des données avec le modèle" de la section 6.2.4, que la présence de biais dans l'estimation des paramètres, dû à une mauvaise modélisation des sources, peut être testée grâce à la mesure du critère $\Phi(q) = 2n_q D(\tilde{R}(q), R(q, \hat{\theta}))$ pour chaque bande spectrale q . La distribution de ce critère doit suivre approximativement une loi de χ^2 et son espérance

doit être égale au nombre de degrés de liberté (qui est défini dans la section 6.2.4). Nous calculons ainsi les critères $\Phi(q)$ divisés par le nombre de degré de liberté, obtenus sur les deux types de données (décorrélées ou non de l’ozone). Nous calculons aussi les quantités précédentes déterminées pour différentes paires de détecteurs. Nous choisissons les détecteurs qui fournissent l’essentiel de l’information quant à la mesure du spectre de puissance du CMB. Nous attendons ainsi des valeurs voisines de 1 pour les différentes quantités calculées.

La figure 7.26 montre les valeurs des quantités $\Phi_{\text{global/paires}}(q)/N_{\text{DL}}$ obtenues à partir des données non-décorrélées de l’ozone. La figure 7.27 montre les mêmes quantités sur les données décorrélées de l’ozone. Concernant les données non-décorrélées de l’ozone, le critère Φ_{global} par degrés de liberté (“global” signifie qu’il est calculé pour l’ensemble des détecteurs) n’est pas très satisfaisant car il est toujours très nettement supérieur à 1. En particulier, il montre une “bosse” entre $\ell = 200$ et $\ell = 300$. Il s’agit précisément de la gamme de fréquences où apparaissent des désaccords entre le spectre de puissance théorique, ajusté sur les données WMAP, et le spectre que nous avons estimé. Les valeurs du critère par degrés de liberté évaluées pour des paires de détecteurs uniquement, faisant intervenir le 143k03, sont relativement satisfaisantes (comme nous l’avons précisé dans le paragraphe “Tests et performances de la partie 6.2.4, nous pouvons considérer que le nombre de degré de liberté pour chaque paire de détecteur est de 1, nous nous attendons ainsi à observer de nombreux points proches de 0). Ce n’est pas le cas de celui calculé entre les détecteurs 217k04 et 217k06. En effet, nous retrouvons un excès important autour de $\ell = 250$, observé sur le test d’ajustement global en utilisant la totalité des détecteurs. Ces deux détecteurs sont très sensibles à l’émission de l’atmosphère. Cette dernière, mal modélisée, est donc responsable de la mauvaise qualité de l’ajustement (voir le paragraphe “Les composantes résiduelles” dans la partie 7.3.3). Les détecteurs très sensibles à l’émission de l’ozone, qui sont les détecteurs à 353 et 545 GHz, sont pour une grande partie responsables du désaccord dans l’ajustement global à toutes les échelles angulaires. Ces détecteurs sont en revanche très peu sensibles aux anisotropies du CMB. Le spectre de puissance du CMB doit donc être affecté dans des proportions relativement faibles pour $\ell \lesssim 150$ et $300 \lesssim \ell \lesssim 500$ (il s’agit de régions où les valeurs du critère Φ pour la paire de détecteurs 217k04 et 217k06, sensible à la fois au CMB et à l’atmosphère est satisfaisant).

L’ajustement sur les données décorrélées de l’ozone est quant à lui très satisfaisant. Les valeurs du critère par degrés de liberté, à la fois global et par paire de détecteurs sont voisins de 1 et ne montrent pas de problèmes particuliers. Nous pouvons donc penser que de puissance du CMB calculé sur ce jeu de données possède peu de contamination par des effets systématiques.

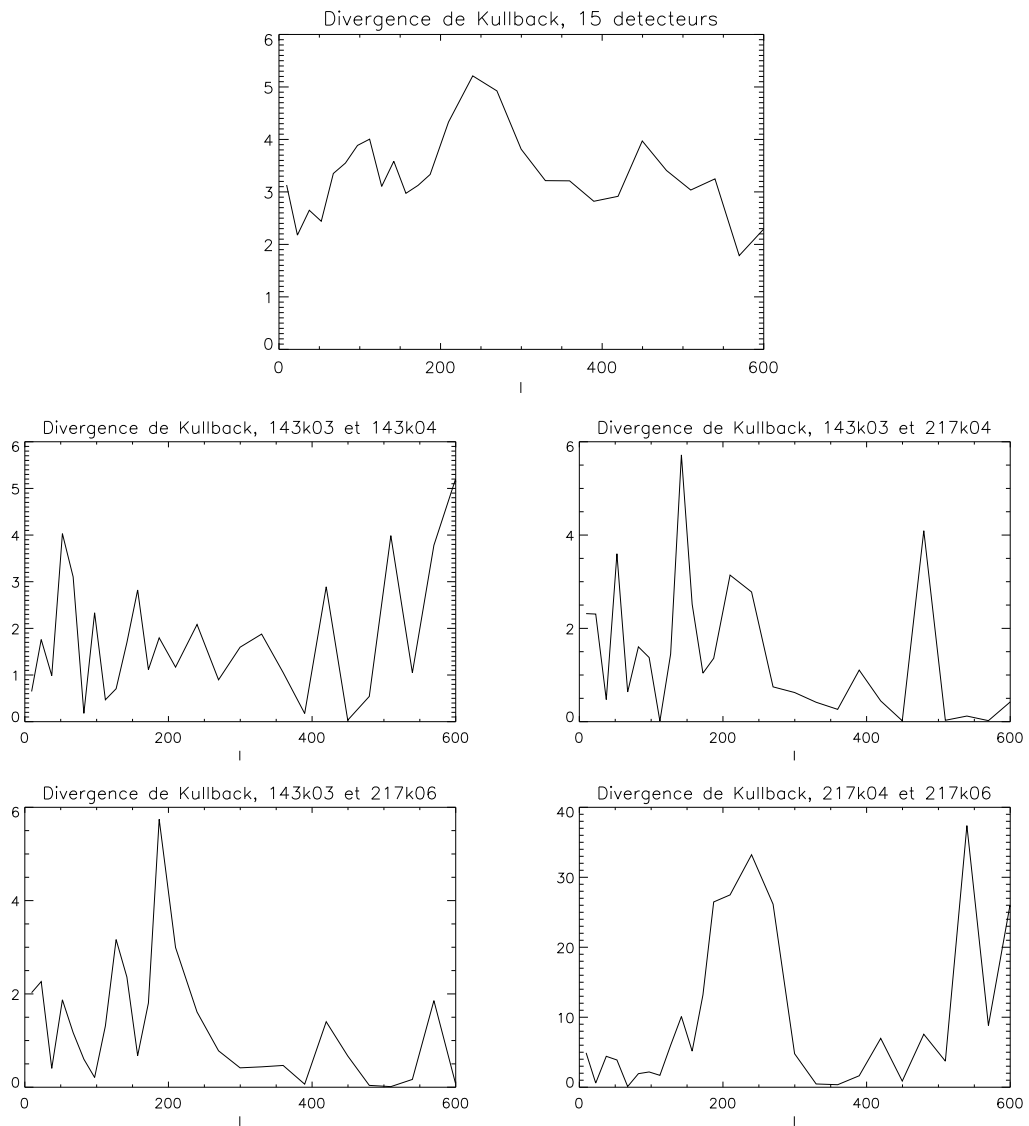


Fig. 7.26: Qualité de l'ajustement donnée par la quantité $\Phi(q)/N_{DL} = 2n_q D(\tilde{R}, R(\hat{\theta}))/N_{DL}$ sur les données non-décorrélées de l'ozone.

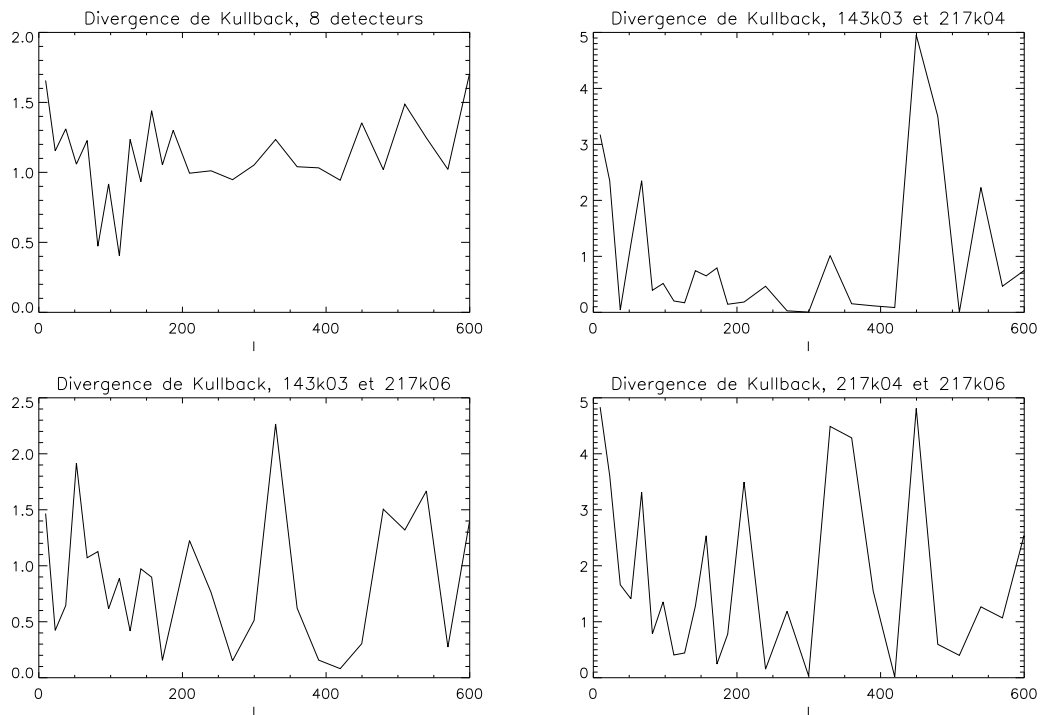


Fig. 7.27: Qualité de l'ajustement donnée par la relation $\Phi(q)/N_{DL} = 2n_q D(\tilde{R}, R(\hat{\theta}))/N_{DL}$ sur les données décorrélées de l'ozone.

CONCLUSION

Cette thèse porte sur le développement de méthodes de traitement de données pour la mesure des anisotropies du fond diffus cosmologique. Les petites fluctuations de température du CMB contiennent une multitude d'informations sur l'Univers primordial ainsi que sur son évolution. En particulier, la forme du spectre de puissance spatial dépend d'un certain nombre de paramètres fondamentaux tels les densités d'énergie des différentes composantes constituant l'Univers ou encore les paramètres d'inflation. Le spectre de puissance du CMB constitue ainsi un formidable outil de sondage de l'Univers. Sa mesure motive aujourd'hui de nombreux efforts au sein de la communauté scientifique. Elle atteint de nos jours un degré de précision tel que la soustraction des émissions astrophysiques d'avant-plan présentes dans les observations (telles les émissions de notre propre galaxie) est de plus en plus critique.

Pour résoudre ce problème, des méthodes de séparation de composantes ont été développées au sein de la communauté. Nous avons montré que ces méthodes sont basées sur un modèle des observations extrêmement simplifié. En particulier, elles ne sont pas adaptées pour la soustraction de certains effets instrumentaux inhérents à la plupart des expériences mesurant le CMB. Les données ordonnées en temps de nombreuses expériences contiennent des dérives du bruit aux plus basses fréquences qui sont, pour une grande partie, corrélées entre les différents détecteurs. Elles décrivent, une fois reprojétées sur les cartes d'observation, des structures striées particulièrement gênantes pour la mesure du spectre de puissance du CMB. J'ai développé une méthode de séparation de composantes généralisée au traitement de tels effets systématiques. L'application de la méthode sur des simulations d'observations de l'instrument haute fréquence du satellite Planck a montré qu'elle permet de séparer les composantes mises en entrée (CMB, émission de la poussière, effet systématique) et valide donc cette approche. Les anisotropies du CMB sont reconstruites avec une précision satisfaisante bien que l'effet systématique ait été volontairement choisi trop fort dans les simulations. Cependant, la méthode, qui prend en compte les différences de pointage des détecteurs, s'applique uniquement sur des petites cartes du ciel où les lignes décrites par le pointage des détecteurs sont parallèles.

Les méthodes de séparation de composantes ne sont pas optimisées pour l'estimation du spectre de puissance du CMB mais pour la fabrication de cartes d'anisotropies. De plus, elles nécessitent des hypothèses fortes concernant les émissions des composantes astrophysiques. J'ai donc dans un deuxième temps utilisé une méthode d'estimation spectrale multi-détecteurs multi-composantes en aveugle (ne faisant pas d'*a priori* sur les lois d'émission des composantes) que j'ai contribué à développer au cours de ma thèse. Dans cette approche, le spectre de puissance de l'ensemble des composantes est estimée en même temps que la "matrice de mélange" donnant l'amplitude des composantes à chaque fréquence d'observation. Dans le cadre de la mission Planck, j'ai montré, en m'appuyant sur des simulations d'observation, que le spectre de puissance du CMB peut être estimé précisément sans biais en aveugle et que des contraintes fortes peuvent être placées sur les lois d'émission des compo-

santes telles que l'émission thermique de la poussière galactique ou encore l'émission synchrotron.

La dernière partie de cette thèse est consacrée à l'application de la méthode sur les données de la mission ballon Archeops. Archeops a été la première expérience ayant permis la mesure précise des fluctuations du CMB aux échelles angulaires intermédiaires (voisines de 1°). J'ai montré que la méthode permet une mesure précise du premier pic acoustique du spectre de puissance du CMB car elle permet d'une part de s'affranchir du biais introduit par le bruit, et d'autre part d'utiliser la quasi-totalité de la couverture du ciel, l'émission thermique de la poussière étant efficacement soustraite. Ce travail a permis de mettre des contraintes sur l'émission de la galaxie, et aussi sur l'étalonnage relatif des détecteurs.

Une des difficultés rencontrées est la présence d'émission atmosphérique s'ajoutant naturellement dans les séries temporelles de mesure. Bien que la méthode d'ajustement spectral permette d'isoler une grande partie de la puissance du signal atmosphérique dans des composantes "poubelles", les paramètres estimés relatifs à l'ensemble des composantes astrophysiques sont affectés. Afin de soustraire l'atmosphère, nous avons recours à des traitements spécifiques en amont qui nous obligent à rejeter une grande partie des données. Une des améliorations envisageables de la méthode d'ajustement spectral consisterait à l'appliquer directement dans les séries temporelles de mesure. Une telle méthode sera extrêmement profitable pour la mesure du spectre de puissance du CMB avec Planck.

Un des objectifs de Planck est la mesure de la polarisation du CMB qui pourrait permettre de détecter les ondes gravitationnelles primordiales et de placer des contraintes importantes sur les modèles d'inflation. En outre, des dégénérescences entre les paramètres cosmologiques seront levées. Malheureusement, les avant-plans astrophysiques sont probablement, pour bon nombre d'entre eux, polarisés à un degré supérieur au CMB. Il sera alors utile de généraliser la méthode multi-détecteurs multi-composantes en aveugle à la mesure des spectres de puissance de la polarisation.

ANNEXE

A. L'ALGORITHME EM ET LA VRAISEMBLANCE

On se propose de démontrer dans cette annexe qu'à chaque itération de l'algorithme EM, la vraisemblance de notre modèle augmente. Soit y les données, θ les paramètres du modèle, et s une variable cachée du modèle (dans le sens où elle n'intervient pas dans l'expression de la vraisemblance).

La vraisemblance est :

$$\mathcal{L} = \log p(y|\theta) \tag{A.1}$$

Elle s'écrit aussi d'après le théorème de Bayes :

$$\mathcal{L}(y|\theta) = \log p(y, s|\theta) \log p(s|y, \theta) \tag{A.2}$$

Soit l'espérance *a posteriori* étant donné y et un jeu de paramètres θ' définie par :

$$E[f(s)|y, \theta'] = \int f(s)p(s|y, \theta')ds \tag{A.3}$$

Comme la vraisemblance ne dépend pas de s , à partir de A.2 on obtient :

$$\mathcal{L}(y|\theta) = E[\log p(y, s|\theta)|y, \theta'] - E[\log p(s|y, \theta)|y, \theta'] \tag{A.4}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}(y|\theta) = Q(\theta, \theta') - H(\theta, \theta') \tag{A.5}$$

où $Q(\theta, \theta')$ est la fonctionnelle EM. On a :

$$H(\theta, \theta') - H(\theta', \theta') = \int p(s|y, \theta') \log \frac{p(s|y, \theta)}{p(s|y, \theta')} ds \tag{A.6}$$

En utilisant l'inégalité $\log x \leq x - 1$, on peut écrire :

$$H(\theta, \theta') - H(\theta', \theta') \leq \int p(s|y, \theta') \left(\frac{p(s|y, \theta)}{p(s|y, \theta')} - 1 \right) ds \tag{A.7}$$

$$\leq 0 \tag{A.8}$$

Donc, si $Q(\theta, \theta') \leq Q(\theta', \theta')$ alors nécessairement $\mathcal{L}(y|\theta) \leq \mathcal{L}(y|\theta')$.

Par conséquent, la maximisation de la fonctionnelle EM entraîne l'accroissement de la vraisemblance, d'où les deux étapes de l'algorithme EM :

- 1) étape E : évaluation de la fonctionnelle $Q(\theta, \theta^k) = E\{\log p(y, s|\theta)|y, \theta^k\}$
- 2) étape M : maximisation de la fonctionnelle par rapport à θ , $\frac{\partial Q(\theta, \theta^k)}{\partial \theta} |_{\theta^{k+1}} = 0$.

B. LA DIVERGENCE DE KULLBACK ENTRE DEUX MATRICES

Soient p_1 et p_2 deux distributions de probabilités quelconques. La divergence de Kullback est une mesure de la divergence entre ces distributions ; elle est définie par :

$$D(p_1, p_2) = \int p_1(x) \log \left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right) dx \quad (\text{B.1})$$

Elle vérifie la propriété suivante : $D(p_1, p_2) \geq 0$, avec l'égalité si $p_1=p_2$. Ainsi, elle peut être considérée comme une mesure de distance entre p_1 et p_2 , bien qu'il ne s'agisse pas "réellement" d'une distance puisque la propriété de symétrie n'est pas vérifiée ($D(p_1, p_2) \neq D(p_2, p_1)$).

Supposons maintenant que p_1 et p_2 sont des distributions de probabilité gaussiennes de dimension m . Ces dernières sont caractérisées par les matrices de covariance spectrale R_1 et R_2 et s'écrivent :

$$p_i(x) = \frac{1}{(2\pi \det R_i)^{m/2}} \exp[-1/2 x^t R_i^{-1} x] \quad (\text{B.2})$$

En utilisant la définition B.1, on obtient l'expression suivante de la divergence de Kullback entre p_1 et p_2 :

$$D(p_1, p_2) = \text{tr}(R_1 R_2^{-1}) - \log \det(R_1 R_2^{-1}) - m \quad (\text{B.3})$$

La quantité B.3 est donc une mesure de la divergence entre deux matrices définies positives que l'on note $D(R_1, R_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

- Amblard, A. : 2002, Analyse des anisotropies du fond diffus cosmologique dans le cadre de l'expérience Archeops, **thèse de doctorat, Université Paris 11**
- Baccigalupi, C., Bedini, L., Burigana, C., De Zotti, G., Farusi, A., Maino, D., Maris, M., Perrotta, F., Salerno, E., Toffolatti, L., et Tonazzini, A. : 2000, Neural networks and the separation of cosmic microwave background and astrophysical signals in sky maps, **318**, 769
- Barreiro, R. B., Hobson, M. P., Banday, A. J., Lasenby, A. N., Stolyarov, V., Vielva, P., et Gorski, K. M. : 2003, astro-ph/0302091
- Bennett, C., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Wollack, E., Wright, E. L., Barnes, C., Greason, M. R., Hill, R. S., Komatsu, E., Nolte, M. R., Odegard, N., Peirs, H. V., Verde, L., et Weiland, J. L. : 2003, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results, *The Astrophysical Journal*, astro-ph/0302207
- Bennett, C., Hill, R. S., Hinshaw, G., Nolte, M. R., Odegard, N., Page, L., Spergel, D. N., Weiland, J. L., Wright, E. L., Halpern, M., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Tucker, G. S., et Wollack, E. : 2003a, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Foreground Emission, *The Astrophysical Journal*, astro-ph/0302208
- Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Wollack, E., Wright, E. L., Barnes, C., Greason, M. R., Hill, R. S., Komatsu, E., Nolte, M. R., Odegard, N., Peiris, H. V., Verde, L., et Weiland, J. L. : 2003b, First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Preliminary Maps and Basic Results, **148**, 1
- Benoît, A., Ade, P., Amblard, A., Ansari, R., Aubourg, É., Bargout, S., Bartlett, J. G., Bernard, J.-P., Bhatia, R. S., Blanchard, A., Bock, J. J., Boscaleri, A., Bouchet, F. R., Bourrachot, A., Camus, P., Couchot, F., de Bernardis, P., Delabrouille, J., Désert, F.-X., Doré, O., Douspis, M., Dumoulin, L., Dupac, X., Filliatre, P., Fosalba, P., Ganga, K., Gannaway, F., Gautier, B., Giard, M., Giraud-Héraud, Y., Gispert, R., Guglielmi, L., Hamilton, J.-C., Hanany, S., Henrot-Versillé, S., Kaplan, J., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lange, A. E., Macías-Pérez, J. F., Madet, K., Maffei, B., Magneville, C., Marrone, D. P., Masi, S., Mayet, F., Murphy, A., Naraghi, F., Nati, F., Patanchon, G., Perrin, G., Piat, M., Ponthieu, N., Prunet, S., Puget, J.-L., Renault, C., Rosset, C., Santos, D., Starobinsky, A., Strukov, I.,

- Sudiwala, R. V., Teyssier, R., Tristram, M., Tucker, C., Vanel, J.-C., Vibert, D., Wakui, E., et Yvon, D. : 2003a, The cosmic microwave background anisotropy power spectrum measured by Archeops, **399**, L19
- Benoît, A., Ade, P., Amblard, A., Ansari, R., Aubourg, É., Bargout, S., Bartlett, J. G., Bernard, J.-P., Bhatia, R. S., Blanchard, A., Bock, J. J., Boscaleri, A., Bouchet, F. R., Bourrachot, A., Camus, P., Couchot, F., de Bernardis, P., Delabrouille, J., Désert, F.-X., Doré, O., Douspis, M., Dumoulin, L., Dupac, X., Filliatre, P., Fosalba, P., Ganga, K., Gannaway, F., Gautier, B., Giard, M., Giraud-Héraud, Y., Gispert, R., Guglielmi, L., Hamilton, J.-C., Hanany, S., Henrot-Versillé, S., Kaplan, J., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lange, A. E., Macías-Pérez, J. F., Madet, K., Maffei, B., Magneville, C., Marrone, D. P., Masi, S., Mayet, F., Murphy, A., Naraghi, F., Nati, F., Patanchon, G., Perrin, G., Piat, M., Ponthieu, N., Prunet, S., Puget, J.-L., Renault, C., Rosset, C., Santos, D., Starobinsky, A., Strukov, I., Sudiwala, R. V., Teyssier, R., Tristram, M., Tucker, C., Vanel, J.-C., Vibert, D., Wakui, E., et Yvon, D. : 2003b, Cosmological constraints from Archeops, **399**, L25
- Benoît, A., Ade, P., Amblard, A., Ansari, R., Aubourg, E., Bartlett, J., Bernard, J.-P., Bhatia, R. S., Blanchard, A., Bock, J. J., Boscaleri, A., Bouchet, F. R., Bourrachot, A., Camus, P., Couchot, F., de Bernardis, P., Delabrouille, J., Désert, F.-X., Doré, O., Douspis, M., Dumoulin, L., Dupac, X., Filliatre, P., Ganga, K., Gannaway, F., Gautier, B., Giard, M., Giraud-Héraud, Y., Gispert, R., Guglielmi, L., Hamilton, J.-C., Hanany, S., Henrot-Versillé, S., Hristov, V. V., Kaplan, J., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lange, A. E., Madet, K., Maffei, B., Marrone, D., Masi, S., Murphy, J. A., Naraghi, F., Nati, F., Perrin, G., Piat, M., Puget, J.-L., Santos, D., Sudiwala, R. V., Vanel, J.-C., Vibert, D., Wakui, E., et Yvon, D. : 2002, Archeops : a high resolution, large sky coverage balloon experiment for mapping cosmic microwave background anisotropies, *Astroparticle Physics* **17**, 101
- Borrill, J. : 1999, MADCAP — The Microwave Anisotropy Dataset Computational Analysis Package, [astro-ph/9911389](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9911389)
- Bouchet, F. R. et Gispert, R. : 1999, Foregrounds and CMB experiments : I. Semi-analytical estimates of contamination, *New Astron.* **4**, 443
- Boulanger, F., Abergel, A., Bernard, J.-P., Burton, W. B., Desert, F.-X., Hartmann, D., Lagache, G., et Puget, J.-L. : 1996, The dust/gas correlation at high Galactic latitude., **312**, 256
- Brandenberger, R. H. : 1985, Quantum field theory methods and inflationary universe models, *Reviews of Modern Physics* **57**, 1
- Cardoso, J. : 2001, in Proc. of the ICA 2001 workshop, San Diego, Dec 2001
- Cardoso, J., Snoussi, H., Delabrouille, J., et Patanchon, G. : 2002, Blind separation of noisy Gaussian stationary sources. Application to cosmic microwave background imaging, in Proc. EUSIPCO Vol. 1, pp 561-564
- Challinor, A. et Lasenby, A. : 1998, Relativistic Corrections to the Sunyaev-Zeldovich Effect, *Astrophys. J.* **499**, 1

- Coles, P. et Lucchin, F. : 2002, in *Cosmology, The origin and Evolution of Cosmic Structure*, WILEY
- Cyburt, R. H., Fields, B. D., et Olive, K. A. : 2001, The NACRE thermonuclear reaction compilation and big bang nucleosynthesis, *New Astron.* **6**, 215
- Davies, R. D., Watson, R. A., et Gutierrez, C. M. : 1996, Galactic synchrotron emission at high frequencies, **278**, 925
- de Bernardis, P., Ade, P. A. R., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Crill, B. P., De Gasperis, G., Farese, P. C., Ferreira, P. G., Ganga, K., Giacometti, M., Hivon, E., Hristov, V. V., Iacoangeli, A., Jaffe, A. H., Lange, A. E., Martinis, L., Masi, S., Mason, P. V., Mauskopf, P. D., Melchiorri, A., Migliorini, L., Montroy, T., Netterfield, C. B., Pascale, E., Piacentini, F., Pogosyan, D., Prunet, S., Rao, S., Romeo, G., Ruhl, J. E., Scaramuzzi, F., Sforna, D., et Vittorio, N. : 2000, A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation, *Nature* **404**, 955
- de Oliveira-Costa, A., Tegmark, M., Zaldarriaga, M., et Hamilton, A. : 2003, The significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP, astro-ph/0307282
- Delabrouille, J., Cardoso, J. F., et Patanchon, G. : 2002a, Multi-Detector Multi-Component spectral matching and applications for CMB data analysis, astro-ph/0211504, **accepté pour une publication dans MNRAS**
- Delabrouille, J., Melin, J.-B., et Bartlett, J. G. : 2002b, in *ASP Conf. Ser. 257 : AMiBA 2001 : High-Z Clusters, Missing Baryons, and CMB Polarization*, pp 81–097
- Delabrouille, J., Patanchon, G., et Audit, E. : 2001, Separation of instrumental and astrophysical foregrounds for mapping CMB anisotropies, *accepté dans Mon. Not. R. Astron. Soc.* astro-ph/0106152
- Dempster, A., Laird, N., et Rubin, D. : 1977, Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society B* **39**, 1
- Desert, F.-X., Boulanger, F., et Puget, J. L. : 1990, Interstellar dust models for extinction and emission, **237**, 215
- Doré, O., Teyssier, R., Bouchet, F. R., Vibert, D., et Prunet, S. : 2001, MAPCUMBA : A fast iterative multi-grid map-making algorithm for CMB experiments, **374**, 358
- Draine, B. T. et Lazarian, A. : 1997, Diffuse Galactic Emission from Spinning Dust Grains, *Bulletin of the American Astronomical Society* **29**, 1298
- Draine, B. T. et Lazarian, A. : 1999, Microwave Emission from Galactic Dust Grains, pp 133–+
- Draine, B. T. et Lee, H. M. : 1984, Optical properties of interstellar graphite and silicate grains, *Astrophys. J.* **285**, 89
- Duncan, A. R., Haynes, R. F., Jones, K. L., et Stewart, R. T. : 1997, Polarized radio emission over the southern Galactic plane at 2.4 GHz, **291**, 279
- Duncan, A. R., Reich, P., Reich, W., et Fürst, E. : 1999, Polarimetric structure in the first Galactic quadrant from the 2.695 GHz Effelsberg survey, **350**, 447
- Dwek, E., Arendt, R. G., Fixsen, D. J., Sodroski, T. J., Odegard, N., Weiland, J. L.,

- Reach, W. T., Hauser, M. G., Kelsall, T., Moseley, S. H., Silverberg, R. F., Shafer, R. A., Ballester, J., Bazell, D., et Isaacman, R. : 1997, Detection and Characterization of Cold Interstellar Dust and Polycyclic Aromatic Hydrocarbon Emission, from COBE Observations, *Astrophys. J.* **475**, 565
- Eke, V. R., Navarro, J. F., et Frenk, C. S. : 1998, The Evolution of X-Ray Clusters in a Low-Density Universe, *ApJ* **503**, 569
- Filliatre, P. : 2002, Etalonnage sol et analyse des données de l'expérience ballon Archeops mesurant les anisotropies du Fond Diffus Cosmologique Etude des contraintes sur l'inflation, **thèse de doctorat**, INPG
- Finkbeiner, D. P. : 2003, A Full-Sky $H\alpha$ Template for Microwave Foreground Prediction, **146**, 407
- Finkbeiner, D. P., Davis, M., et Schlegel, D. J. : 1999, Extrapolation of Galactic Dust Emission at 100 Microns to CMBR Frequencies Using FIRAS, *Astrophys. J.* **524**, 867
- Finkbeiner, D. P. et Schlegel, D. J. : 1999, Interstellar dust emission as a CMBR foreground, *published in Microwave Foregrounds. Edited by A. de Oliveira-Costa and M. Tegmark. San Francisco, Astronomical Society of the Pacific, 1999*, 101, astro-ph/9907307
- Fixsen, D., Cheng, E., Gales, J., Mather, J., Schafer, R., et Wright, E. : 1996, The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS Data Set, *Astrophys. J.* **473**, 576, astro-ph/9605054
- Gamow, G. : 1946, Expanding Universe and the Origin of Elements, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 572
- Gamow, G. : 1948, The Evolution of the Universe, *Nature* **162**, 680
- Gautier, T. N., Boulanger, F., Perault, M., et Puget, J. L. : 1992, A calculation of confusion noise due to infrared cirrus, *Astronomical Journal* **103**, 1313
- Grainge, K., Carreira, P., Cleary, K., Davies, R. D., Davis, R. J., Dickinson, C., Genova-Santos, R., Gutiérrez, C. M., Hafez, Y. A., Hobson, M. P., Jones, M. E., Kneissl, R., Lancaster, K., Lasenby, A., Leahy, J. P., Maisinger, K., Pooley, G. G., Rebolo, R., Rubiño-Martin, J. A., Sosa Molina, P. J., Ödman, C., Rusholme, B., Saunders, R. D. E., Savage, R., Scott, P. F., Slosar, A., Taylor, A. C., Titterton, D., Waldram, E., Watson, R. A., et Wilkinson, A. : 2003, The cosmic microwave background power spectrum out to $l=1400$ measured by the Very Small Array, **341**, L23
- Guth, A. H. et Weinberg, E. J. : 1983, *Nucl. Phys. B, Part. Phys.* **212**, 321
- Halverson, N. W., Leitch, E. M., Pryke, C., Kovac, J., Carlstrom, J. E., Holzapfel, W. L., Dragovan, M., Cartwright, J. K., Mason, B. S., Padin, S., Pearson, T. J., Readhead, A. C. S., et Shepherd, M. C. : 2002, Degree Angular Scale Interferometer First Results : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum, *Astrophys. J.* **568**, 38
- Hanany, S., Ade, P., Balbi, A., Bock, J., Borrill, J., Boscaleri, A., de Bernardis, P., Ferreira, P. G., Hristov, V. V., Jaffe, A. H., Lange, A. E., Lee, A. T., Mauskopf,

- P. D., Netterfield, C. B., Oh, S., Pascale, E., Rabii, B., Richards, P. L., Smoot, G. F., Stompor, R., Winant, C. D., et Wu, J. H. P. : 2000, MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of 10 arcminutes -5 degrees, *Astrophys. J., Lett.* **545**, L5
- Haslam, C. G. T., Stoffel, H., Salter, C. J., et Wilson, W. E. : 1982, A 408 MHz all-sky continuum survey. II - The atlas of contour maps, **47**, 1
- Hildebrand, R. H. et Dragovan, M. : 1995, The Shapes and Alignment Properties of Interstellar Dust Grains, *Astrophys. J.* **450**, 663
- Hinshaw, G., Spergel, D. N., Verde, L., Hill, R. S., Meyer, S. S., Barnes, C., Bennett, C. L., Halpern, M., Jarosik, N., Kogut, A., Komatsu, E., Limon, M., Page, L., Tucker, G. S., Weiland, J., Wollack, E., et Wright, E. L. : 2003, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Angular Power Spectrum, *The Astrophysical Journal*, astro-ph/0302217
- Hivon, E., Górski, K. M., Netterfield, C. B., Crill, B. P., Prunet, S., et Hansen, F. : 2002, MASTER of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum : A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex Cosmic Microwave Background Data Sets, *Astrophys. J.* **567**, 2
- Hobson, M. P., Jones, A. W., Lasenby, A. N., et Bouchet, F. R. : 1998, Foreground separation methods for satellite observations of the cosmic microwave background, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **300**, 1
- Hobson, M. P. et Lasenby, A. N. : 1998, The entropic prior for distributions with positive and negative values, **298**, 905
- Hu, W. : 1995, *Wandering in the Background : A CMB Explorer*, Ph.D. thesis, UC Berkeley
- Hubble, E. : 1929, *Proceedings of the National Academy* **15**, 168
- Jonas, J. L., Baart, E. E., et Nicolson, G. D. : 1998, The Rhodes/HartRAO 2326-MHz radio continuum survey, **297**, 977
- Jungman, G., Kamionkowski, M., Kosowsky, A., et Spergel, D. : 1996, *Phys. Rev. D* **54**, 1332
- Kogut, A., Banday, A. J., Bennett, C. L., Gorski, K. M., Hinshaw, G., Smoot, G. F., et Wright, E. I. : 1996, Microwave Emission at High Galactic Latitudes in the Four-Year DMR Sky Maps, *Astrophys. J., Lett.* **464**, L5+
- Kompaneets, A. S. : 1957, *SvPhJETP* **4**, 730
- Kullback, S. : 1954, *Information theory and statistics*. New York : John Wiley & Sons.
- Kuo, C.-L., Ade, P., Bock, J. J., Daub, M. D., Goldstein, J., Holzapfel, W. L., Lange, A. E., Newcomb, M., Peterson, J. B., Ruhl, J., Runyan, M. C., et Torbet, E. : 2002, ACBAR CMB Power Spectrum, *American Astronomical Society Meeting* **201**, 0
- Lagache, G., Abergel, A., Boulanger, F., et Puget, J.-L. : 1998, The interstellar cold dust observed by COBE, **333**, 709
- Lagache, G. et Puget, J. L. : 2000, Detection of the extra-Galactic background fluc-

- tuations at 170 μm , **355**, 17
- Lamarre, J.-M. et al. : 2000, *Astrophys. Lett. Commun.* **37**, 161
- Langlois, D. : 1999, Correlated adiabatic and isocurvature perturbations from double inflation, *Phys. Rev. D* **59**, 123512
- Lasenby, A. N., Hancock, S., Davies, R. D., Gutierrez de La Cruz, C. M., Watson, R. A., et Rebolo, R. : 1995, The Tenerife Observations II : An Overview of the Results and Future Prospects for Ground-based CMB Astronomy, *Astrophysical Letters Communications* **32**, 191
- Linde, A. D. : 1983, *Phys. Lett.* **129B**, 177
- Lineweaver, C. H., Tenorio, L., Smoot, G. F., Keegstra, P., Banday, A. J., et Lubin, P. : 1996, The Dipole Observed in the COBE DMR Four-Year Data, *Astrophys. J.* **470**, 38, astro-ph/9601151
- Luenberger, D. G. : 1973, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA
- Maino, D., Banday, A. J., Baccigalupi, C., Perrotta, F., et Górski, K. M. : 2003, Astrophysical component separation of COBE-DMR 4-yr data with FASTICA, **344**, 544
- Maino, D., Farusi, A., Baccigalupi, C., Perrotta, F., Banday, A. J., Bedini, L., Burigana, C., De Zotti, G., Górski, K. M., et Salerno, E. : 2002, All-sky astrophysical component separation with Fast Independent Component Analysis (FASTICA), **334**, 53
- Mandolesi, N. et al. : 2000, The Planck Low Frequency Instrument, *Astrophys. Lett. Commun.* **37**, 151
- Mason, B. et CBI Collaboration : 2001, Measurements of the CMB Power Spectrum to $l=4000$ with the CBI, *American Astronomical Society Meeting* **199**, 0
- Matsuhara, H., Kawara, K., Sato, Y., Taniguchi, Y., Okuda, H., Matsumoto, T., Sofue, Y., Wakamatsu, K., Cowie, L. L., Joseph, R. D., et Sanders, D. B. : 2000, ISO deep far-infrared survey in the “Lockman Hole”. II. Power spectrum analysis : evidence of a strong evolution in number counts, **361**, 407
- McLachlan, G. et Krishnan, T. : 1996, *The EM algorithm and Extensions.*, Wiley Inter-Science
- Miville-Deschênes, M.-A., Lagache, G., et Puget, J.-L. : 2002, Power spectrum of the cosmic infrared background at 60 and 100 μm with IRAS, **393**, 749
- Nollett, K. M. et Burles, S. : 2000, *Phys. Rev. D* **61**, 123505
- Patanchon, G., Snoussi, H., Cardoso, J., et Delabrouille, J. : 2003, Component separation for Cosmic Microwave Background data : A blind approach based on spectral diversity, *PSIP03 proceedings*, pp. 17–20
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., Hook, I. M., Kim, A. G., Kim, M. Y., Lee, J. C., Nunes, N. J., Pain, R., Pennypacker, C. R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R. S., Irwin, M., McMahon, R. G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B. J., Filippenko, A. V., Matheson, T., Fruchter, A. S., Pana-

- gia, N., Newberg, H. J. M., Couch, W. J., et The Supernova Cosmology Project : 1999, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* **517**, 565
- Prunet, S., Teyssier, R., Scully, S. T., Bouchet, F. R., et Gispert, R. : 2001, Error estimation for the MAP experiment, **373**, 13
- Puget, J.-L., Abergel, A., Bernard, J.-P., Boulanger, F., Burton, W. B., Desert, F.-X., et Hartmann, D. : 1996, Tentative detection of a cosmic far-infrared background with COBE., **308**, L5+
- Reich, P. et Reich, W. : 1986, A radio continuum survey of the northern sky at 1420 MHz. II, **63**, 205
- Revenu, B. : 2000, Anisotropies et polarisation du rayonnement fossile : méthodes de détection et traitement des données, *thèse de doctorat*, Université Paris 7
- Seljak, U. et Zaldarriaga, M. : 1996, *Astrophys. J.* **469**, 437
- Skilling, J. (ed.) : 1989, *Maximum entropy and bayesian methods : 8 : 1988*
- Smoot, G. et al. : 1992, Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps, *Astrophys. J., Lett.* **396**, L1
- Smoot, G. F. : 1999, in *ASP Conf. Ser. 181 : Microwave Foregrounds*, pp 61–+
- Snoussi, H., Patanchon, G., Maciaz-Perez, J., Mohammad-Djafari, A., et Delabrouille, J. : 2001, Bayesian blind component separation for cosmic microwave background observations, *Acte de conférence MAXENT*
- Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V., Komatsu, E., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, D. N., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Tucker, G. S., Weiland, J., Wollack, E., et Wright, E. L. : 2003, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters, *The Astrophysical Journal*, **astro-ph/0302209**
- Starobinsky, A. A. : 1979, *JETP Lett.* **30**, 682
- Stolyarov, V., Hobson, M. P., Ashdown, M. A. J., et Lasenby, A. N. : 2002, All-sky component separation for the Planck mission, **336**, 97
- Sunyaev, R. A. et Zel'dovich, Y. B. : 1970, *Astrophys. Space. Sci.* **7**, 3
- Tegmark, M. : 1999, Cosmological Constraints from Current Cosmic Microwave Background and Type IA Supernova Data : A Brute Force, Eight-Parameter Analysis, *Astrophys. J., Lett.* **514**, L69
- Tegmark, M., de Oliveira-Costa, A., et Hamilton, A. : 2003, A high resolution foreground cleaned CMB map from WMAP, **astro-ph/0302496**
- Tegmark, M. et Efstathiou, G. : 1996, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **281**, 1297
- Tegmark, M. et Efstathiou, G. : 1996, A method for subtracting foregrounds from multifrequency CMB sky maps**, **281**, 1297
- Toffolatti, L., Argüeso Gomez, F., de Zotti, G., Mazzei, P., Franceschini, A., Danese, L., et Burigana, C. : 1998, Extragalactic source counts and contributions to the anisotropies of the cosmic microwave background : predictions for the Planck Surveyor mission, **297**, 117
- Uyaniker, B., Fürst, E., Reich, W., Reich, P., et Wielebinski, R. : 1999, A 1.4 GHz

- radio continuum and polarization survey at medium Galactic latitudes. II. First section, **138**, 31
- Valls-Gabaud, D. : 1998, Cosmological applications of H-alpha surveys, *Publications of the Astronomical Society of Australia* **15**, 111
- Vielva, P., Barreiro, R. B., Hobson, M. P., Martínez-González, E., Lasenby, A. N., Sanz, J. L., et Toffolatti, L. : 2001, Combining maximum-entropy and the Mexican hat wavelet to reconstruct the microwave sky, **328**, 1
- Yvon, D. et al. : 2003, En préparation